Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

Examen du 22 Juin 2012

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Calculer $I = \int_0^\pi t^2 \sin t \, dt$ en intégrant deux fois par parties.

(2) Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$. Calculer l'intégrale $J = \int_B (x^2 + y^2 + y^2)^3 dxdydz$ en utilisant les coordonnées sphériques.

(3) Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $x + y = 4$. Dessiner $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

(4) Calculer la longueur du chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{1}{3} (2t + 1)^{3/2} \right).$$

(5) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'arc de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ joignant le point $(\frac{1}{2}, 2)$ au point $(3, \frac{1}{3})$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma x^2 y dx + xy^2 dy$.

(6) Soit Γ le bord du carré $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, orienté dans le sens positif. Soient également u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma (u(x)+xy^3)dx+(v(y)+5x^2y)dy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $0 < \alpha < \beta$.

(1) Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_\alpha^\beta e^{-x^2 y} dy$.

(2) Montrer que pour $y \in [\alpha, \beta]$ fixé, on a $\int_0^\infty x e^{-x^2 y} \, dx = \frac{1}{2y}$.

(3) En utilisant le théorème de Fubini, déduire de (1) et (2) la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \, dx .$$

Exercice 2. Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0,\ xy < 1 \text{ et } -\frac{3}{2} < y - x < \frac{3}{2}\right\}$. On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{D}} \frac{(x+y)e^{y-x}}{1+xy}\, dxdy\,.$$

(1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.

(2) Soit $\Phi :]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[\times]0,1[\to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{1}{2}\,(\sqrt{u^2+4v}-u), \frac{1}{2}\,(\sqrt{u^2+4v}+u)\right).$$

(a) Montrer que si $(x,y) = \Phi(u,v)$, alors $(u,v) = (y-x, xy)$.

(b) Écrire la matrice jacobienne de Φ en un point (u,v), puis montrer que si $(x,y) = \Phi(u,v)$, alors $J_\Phi(u,v) = \frac{-1}{x+y}$.

(3) On admet que Φ est un difféomorphisme de $]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[\times]0,1[$ sur $\mathcal{D}$. Calculer I en utilisant la formule de changement de variables.