Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

DS du 14 Mars 2012

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, puis calculer l'intégrale $J = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.
(2) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = (3x+1)\cos(2x)$.
(3) Calculer l'intégrale $J = \int_2^\infty \frac{dx}{x\,(\ln x)^3}$ en posant $u = \ln(x)$.
(4) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \text{ et } x + 2y \leq 1\}$.
 (a) Dessiner $\mathcal{D}$.
 (b) Calculer l'intégrale $J = \int_{\mathcal{D}} xy\,dxdy$.
(5) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 + z\}$.
 (a) Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{D}^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in \mathcal{D}\}$. Déterminer l'aire de $\mathcal{D}^z$.
 (b) Calculer le volume de $\mathcal{D}$.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on pose

$$I_n(\alpha) = \int_0^n t^{\alpha-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt\,.$$

(1) Montrer qu'on a $I_n(\alpha) = n^\alpha \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^n\,du$.
(2) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose

$$J_k(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^k\,du\,.$$

 (a) Calculer $J_0(x)$ pour tout $x > 0$.
 (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que si $m \geq 1$ et $\beta > 0$, alors

$$J_m(\beta) = \frac{m}{\beta}\,J_{m-1}(\beta+1)\,.$$

(3) Déduire de (1) et (2) que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$, on a

$$I_n(\alpha) = \frac{n!\, n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \cdot$$

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$.

  (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\int_0^\infty f(x,y)\, dy = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \cdot$

  (b) Calculer $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dy \right) dx$.

  (c) Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\int_0^\infty e^{-y^2 x^2}\, dx = \frac{1}{y}\, J$.

  (d) En déduire que $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dx \right) dy = J^2$.

(2) Calculer J.