Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle\, ,\, \rangle$. On note $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \|x\|^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
(2) Montrer f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = X^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$, et trouver sa différentielle.
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P_k : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ par $P_k(X) = X^k$.

(1) Montrer par récurrence sur k que P_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et que pour $k \geq 1$ et $A, H \in M_n(\mathbb{R})$, on a
$$DP_k(A)H = \sum_{j=0}^{k-1} A^j H A^{k-1-j}\,.$$
(2) Montrer que P_k est de classe $\mathcal{C}^1$.
(3) Montrer qu'on a $\|DP_k(A)\| \leq k\|A\|^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ et pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. On note $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles.

(1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$. (*Penser au déterminant*).
(2) Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et H telle que $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a
$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = -(A+H)^{-1} H A^{-1}.$$
(3) Montrer que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et trouver sa différentielle.

Exercice 5. Soient E et F deux evn, et soit $f : E \to F$. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(h) = O(\|h\|^\alpha)$ au voisinage de 0. Montrer que f est différentiable en 0.

Exercice 6. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $f : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par $f(u) = \varphi \circ u$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{C}([0,1])$ et que pour $u, h \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $Df(u)h = (\varphi' \circ u) \times h$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la fonction $x \mapsto \|x\|$ n'est dérivable en 0 dans aucune direction.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$ et $f(x,x^2) = 1$ pour tout $x \neq 0$.

(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
(2) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions.

Exercice 9. Soit E et F deux evn, et soit $f : E \to F$. On suppose que f admet en un point $p \in E$ une dérivée dans la direction d'un vecteur $e \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\partial_{\lambda e} f(p)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et qu'on a $\partial_{\lambda e} f(p) = \lambda \partial_e f(p)$.

Exercice 10. Montrer que la formule $g(x,y) = xy + x\sqrt{2 - y^2}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à préciser.

Exercice 11. Écrire les matrices jacobiennes des applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $f(x,y,z) = (xy\cos(y^3 z), e^{z^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2})$ et $g(x,y) = (x^3 \log(3 + x^4 y^4), e^{\sqrt{1+x^2y^2}})$.

Exercice 12. Étudier la différentiabilité de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0,0) = 0$ et $f(x,y,z) = xyz\, \log(x^2 + y^2 + z^2)$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Exercice 13. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p + q > 3$.

Exercice 14. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x,y) = |xy|^\alpha$.

(1) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0, y \neq 0\}$.
(2) Montrer que f_α est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
(3) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 15. Pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Montrer que f_α possède des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.
(2) Montrer que si $\alpha < 1/2$, alors f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
(3) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\arctan(y/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.
(1) Montrer que f possède des dérivées partielles en tout point $(0,y)$ et calculer ces dérivées partielles.
(2) Déterminer les points de différentiabilité de f.

Exercice 17. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(0,y) = (0,0)$ et $f(x,y) = \left(\sqrt{y}\,x^2\cos(1/x^3), \sqrt{y}\,x^2\sin(1/x^3)\right)$ si $x \neq 0$.
(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega^* = \{(x,y) \in \Omega;\ x \neq 0\}$.
(2) Montrer que si $a = (0,y_0) \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{R}^2$ vérifie $a + h \in \Omega$, alors
$$\|f(a+h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 \sqrt{y_0 + \|h\|_\infty}\,.$$
En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec $Df(x,y) = 0$ si $x = 0$.
(3) Montrer que le déterminant jacobien $J_f(x,y) = \det M_f(x,y)$ prend exactement deux valeurs sur Ω.

Exercice 18. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer son gradient.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point, et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, exprimer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(tx)$ à l'aide des dérivées partielles de f.

Exercice 22. Soient E et F des evn, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, $u : \mathbb{R} \to E$ dérivable et $f : E \to F$ différentiable. Calculer les dérivées des fonctions $t \mapsto f(\alpha(t)u(t))$ et $t \mapsto \alpha(t)f(u(t))$.

Exercice 23. Soient E, F_1, F_2, G des evn, $u : E \to F_1$, $v : E \to F_2$ et $B : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue. On définit $f : E \to G$ par $f(x) = B(u(x), v(x))$.

(1) On suppose que u et v sont différentiables sur E. Montrer que l'application f est différentiable et donner l'expression de $Df(a)$ pour tout $a \in E$.
(2) Soit $a \in E$. On suppose que u est différentiable en a, que $u(a) = 0$ et que v est continue en a. Montrer que f est différentiable en a.

Exercice 24. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$. Montrer que $h(x, y) = f(xy) + g(x/y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω à préciser, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 25. Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\theta = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \int_0^{\theta(x^2 y, y^3 z)} \varphi(t)\, dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 26. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle\, e^{-\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $\langle\, ,\, \rangle$ est le produit scalaire usuel.

(1) En utilisant le théorème des fonctions composées, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.
(2) Retrouver les résultats de (1) en utilisant les dérivées partielles.

Exercice 27. (fonctions homogènes)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **homogène de degré** λ si on a

$$f(tx) = t^\lambda f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t > 0$.

(1) Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et homogènes de degré 0.
(2) En utilisant l'exercice 21, montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est homogène de degré λ;
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n\ :\ \sum_{j=1}^{n} x_j\, \partial_j f(x) = \lambda f(x)$.

Exercice 28. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + y^4)^{1/2}.$$

(1) En utilisant l'exercice 27, déterminer les solutions de l'équation "homogène" $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(2) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto (x^4 + y^4)^{1/2}$ est homogène de degré λ à préciser, et en déduire une solution particulière de (E).
(3) Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 29. Soient E et F des evn, $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire continue, et $f : E \to F$ différentiable. On suppose que pour tout $x \in E$, on a

$$Df(x)x = B(x, x).$$

(1) Soit $x \in E$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to E$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(tx)$. Calculer $\varphi'(t)$ pour $t > 0$.
(2) On pose $c = f(0)$. Montrer qu'on a $f(x) = c + \frac{1}{2}B(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 30. Soit $C \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = C\,.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right)\,.$$

   (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide de g.
   (b) Calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ en fonction des dérivées partielles de f.
(2) Soit $c \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $g(u, v)$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $\frac{\partial g}{\partial u} = c$.
(3) Conclure qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction dérivable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{C}{2}\,(x - y) + \varphi(x + y)$.

Exercice 31. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer qu'une fonction f différentiable sur $\mathbb{R}^2$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si elle est de la forme $f(x, y) = \varphi(-bx + ay)$, où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. (*Poser* $\Delta = a^2 + b^2$, $g(u, v) = f\left(\frac{au - bv}{\Delta}, \frac{-bu + av}{\Delta}\right)$, *et raisonner comme dans l'exercice 30*).

Exercice 32. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et soit $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ différentiable. On note $H \subset \mathbb{R}^n$ l'hyperplan orthogonal à a, et on choisit une base $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ de H. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g(\langle x, h_1\rangle, \ldots \langle x, h_{n-1}\rangle)$ vérifie $\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$.

Exercice 33. (coordonnées polaires)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, et soit $\widetilde{f} :]0, \infty[\times \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\widetilde{f}(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

(1) Montrer que $\widetilde{f}$ est différentiable et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
(2) Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de $\widetilde{f}$.

Exercice 34. (gradient d'une fonction radiale)
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla f(x) = \varphi'(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}\,.$$

Exercice 35. (divergence d'un champ de vecteurs radial)
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et soit $V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$V(x) = \varphi(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}\,.$$

(1) Pourquoi V est-elle différentiable?
(2) On pose $\nabla \cdot V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, où $v_1, \ldots, v_n$ sont les composantes de V. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\nabla \cdot V(x) = \varphi'(r) + \frac{n-1}{r}\,\varphi(r)\,.$$

Exercice 36. Soit $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $I(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$, et que si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifie $\|a\| = 1$, alors $DI(a)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à a.

Exercice 37. Soit $f(t, y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en tout point $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(1) On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $F(u, v, w) = \int_u^v f(t, w)\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
(2) Soient $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, c(x))\,dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 38. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit $g = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$g(x) = \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt\,.$$
Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$.

Exercice 39. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle. En utilisant l'exercice 3, montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\|B^k - A^k\| \leq k \max(\|A\|, \|B\|)^{k-1} \|B - A\|\,.$$

Exercice 40. Soient E et F deux evn et soit $f : E \to F$ une application différentiable. On suppose que f est bornée sur toute boule $B \subset E$ et qu'on a $\lim_{\|x\|\to\infty} \|Df(x)\| = 0$. Montrer qu'on a $\lim_{\|x\|} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Exercice 41. Soient E et F deux evn, soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application continue sur E et différentiable sur $E \setminus \{a\}$. On suppose que $Df(x)$ admet une limite L dans $\mathcal{L}(E, F)$ quand $x \to a$. Montrer que f est différentiable en a, avec $Df(a) = L$.

Exercice 42. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)\sin(ky)}{k^3}\cdot$ Justifier la définition et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 43. En utilisant les exercices 3 et 39, montrer que l'application $X \mapsto e^X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{R})$, et que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors (en supposant $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle)
$$\|e^B - e^A\| \leq \max(e^{\|A\|}, e^{\|B\|}) \|B - A\|\,.$$

Exercice 44. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on pose
$$\sin(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(k+1)!}\cdot$$
Justifier la définition, montrer que l'application sin est de classe $\mathcal{C}^1$, et montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\|\sin(B) - \sin(A)\| \leq \max(\operatorname{ch}\|A\|, \operatorname{ch}\|B\|) \times \|B - A\|\,.$

Exercice 45. Soit E un evn et soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit également $a \in E$. On suppose qu'on a $f(a) = a$ et $\|Df(a)\| < 1$.

(1) Montrer qu'on peut trouver $r > 0$ et $k < 1$ tels que
$$\forall x, y \in B(a, r) \ : \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\,.$$

(2) Montrer que la boule $B(a,r)$ est stable par f.
(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f^n = f\circ\cdots\circ f$. Montrer que pour tout point $x_0 \in B(a,r)$, la suite $(x_n) = (f^n(x_0))$ converge vers a, et donner une majoration de $\|x_n - a\|$ en fonction de k, n et $\|x_0 - a\|$.

Exercice 46. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ par

$$f(X) = 2X - XAX\,.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer $Df(A^{-1})$.
(2) On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Montrer qu'on peut trouver $r > 0$ tel que : pour toute matrice X_0 vérifiant $\|X_0 - A^{-1}\| < r$, la suite $(f^n(X_0))$ converge vers A^{-1}.