

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a

$$\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|.$$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que la norme est une fonction *convexe* sur E : si $u, v \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq \lambda\|u\| + (1 - \lambda)\|v\|$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{n}\|u\|_\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$.

Exercice 4. Pour $u \in \mathcal{C}([0, 1])$, on pose $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt$.

- (1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([0, 1])$.
- (2) Pour $k \geq 2$, on note $u_k \in \mathcal{C}([0, 1])$ la fonction nulle sur les intervalles $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{k}]$ et $[\frac{1}{2} + \frac{1}{k}, 1]$, valant k en $\frac{1}{2}$ et affine sur les intervalles $[\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}]$. Calculer $\|u_k\|_1$.
- (3) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes?

Exercice 5. On munit $\mathcal{C}(0, 1)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $u_k \in \mathcal{C}([0, 1])$ la fonction nulle sur les intervalles $[0, 1/(2k+1)]$ et $[1/(2k-1), 1]$, valant 1 au point $t = 1/2k$, et affine sur les intervalles $[1/(2k-1), 1/2k]$ et $[1/2k, 1/(2k+1)]$.

- (1) Montrer que la suite (u_k) est bornée.
- (2) Calculer $\|u_q - u_p\|_\infty$ pour $p < q$.
- (3) Montrer que (u_k) ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (1) Montrer que f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, mais n'est pas continue en $(0, 0)$
- (2) Est-il possible de modifier la valeur de $f(0, 0)$ pour rendre f continue en $(0, 0)$?

Exercice 7. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Exercice 8. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(0, 0) = 0$ et $f_\alpha(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie l en $\pm\infty$. On définit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x, y) = (x + y)f\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $g(x, 0) = lx$.

- (1) Pourquoi g est-elle continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$?
- (2) Montrer que g est continue en tout point $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$.
- (3) Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} , et en déduire que g est également continue en $(0, 0)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x, x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 11. Montrer en une ligne que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle.

- (1) Montrer que si $H \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|H\| < 1$, alors la série $\sum H^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.
- (2) En déduire que si $\|H\| < 1$ alors $I - H$ est inversible, et donner une formule pour $(I - H)^{-1}$.
- (3) Conclure que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|M - I\| < 1$, alors M est inversible.

Exercice 13. Dans tout l'exercice, E est un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$, autrement l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(E)$ qui sont bijectives et telles que l'application linéaire L^{-1} est continue. (*En fait L^{-1} est automatiquement continue si $L \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, mais on n'a pas besoin de ce résultat difficile*).

- (1) Montrer que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H \in GL(E)$ et de plus $\|(Id - H)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|H\|)$.
- (2) Montrer que si $A \in GL(E)$ et si $L \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|L - A\| \leq 1/2\|A^{-1}\|$, alors $L \in GL(E)$ et $\|L^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$. (*Écrire $L = A(Id - H)$ où H est à déterminer, et utiliser (1)*).
- (3) Montrer que si $A, L \in GL(E)$, alors $L^{-1} - A^{-1} = L^{-1}(A - L)A^{-1}$.
- (4) Déduire de (2) et (3) que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $L \mapsto L^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 14. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. (*Penser au déterminant*).

Exercice 15. Soit E un evn. Montrer que si $(u_k) \subset E$ est une suite de Cauchy possédant une sous-suite convergente, alors (u_k) est convergente.

Exercice 16. Soit E un evn. On suppose que toute série normalement convergente à termes dans E est convergente. Le but de l'exercice est de montrer que E est complet.

- (1) Soit (u_k) une suite de Cauchy dans E . Montrer que (u_k) possède une sous-suite (v_k) telle que $\|v_{k+1} - v_k\| \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (2) Conclure en utilisant l'exercice 15.

Exercice 17. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constituée par toutes les suites de nombres réels $(x(j))_{j \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x(j)$ est absolument convergente. Pour $u = (x(j)) \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |x(j)|.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 18. On munit \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Exercice 19. Démontrer directement le “lemme de scalarisation” pour l'evn $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Exercice 20. Soit F un espace vectoriel normé.

- (1) Soient $a, b \in F$, et soit $u : \mathbb{R} \rightarrow F$ définie par $u(h) = \|a + hb\|$.

- (a) Montrer que u est une fonction convexe.
- (b) Montrer à l'aide de (a) que si $0 < h < h'$, alors

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} \leq \frac{u(h') - u(0)}{h'} \leq \|b\|.$$

- (c) Montrer que u est dérivable à droite en 0, avec $u'_d(0) \leq \|b\|$.

- (2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$. On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \|\varphi(t)\|$.

- (a) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose que la fonction φ est dérivable en t_0 . Montrer qu'on peut écrire $f(t_0+h) = \|\varphi(t_0) + h\varphi'(t_0)\| + \alpha(h)$, où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$.

- (b) Montrer que si φ est dérivable en un point t_0 , alors f est dérivable à droite en t_0 , avec $f'_d(t_0) \leq \|\varphi'(t_0)\|$.

Exercice 21. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On suppose qu'on a $\|\gamma(t)\|_2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 22. Soient F un espace de Banach et soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|\varphi'(t)\| \leq k \|\varphi(t)\|$ pour tout $t \geq 0$.

- (1) On pose $a = \|\varphi(0)\|$ et $u(t) = \|\varphi(t)\|$. Montrer qu'on a $u(t) \leq a + k \int_0^t u(s) ds$ pour tout $t \geq 0$.
- (2) On pose maintenant $v(t) = a + k \int_0^t u(s) ds$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-kt}v(t)$ est décroissante sur $[0, \infty[$.
- (3) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{kt}$.

Exercice 23. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow F$ une fonction dérivable.

- (1) Montrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $t \geq A$, on a

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(A)\| + (t - A) \sup_{s \geq A} \|\varphi'(s)\|.$$

- (2) Montrer que si on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$.

Exercice 24. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow F$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, \infty[$. On suppose que $\varphi'(t)$ admet une limite $l \in F$ quand $t \rightarrow 0^+$.

- (1) Montrer que pour tout $t > 0$, on peut trouver $c_t \in]0, t[$ tel que

$$\|\varphi(t) - \varphi(0) - tl\| \leq t \|\varphi'(c_t) - l\|.$$

- (2) Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = l$.

Exercice 25. (inégalité des accroissements finis "généralisée")

Soient F un espace vectoriel normé, $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , et $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose qu'on a

$$\forall t \in]a, b[: \|\varphi'(t)\| \leq g'(t).$$

- (1) Montrer que si $\Theta \in F^*$ vérifie $\|\Theta\| \leq 1$, alors la fonction $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \Theta(\varphi(t)) - g(t)$ est décroissante sur $[a, b]$. En particulier, on a $\psi(b) - \psi(a) \leq 0$.
- (2) En utilisant le "lemme de scalarisation", déduire de (1) qu'on a

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

- (3) Redémontrer en 3 lignes le résultat de (2) lorsque φ et g sont supposées de classe \mathcal{C}^1 et que F est complet.

Exercice 26. Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, où F est un evn. On suppose qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq M$ sur $[a, b]$ pour une certaine constante M . Le but de l'exercice de montrer qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M(b - a)$ en utilisant une méthode différente de celle vue en cours pour démontrer l'inégalité des accroissements finis.

- (1) Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On suppose qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \geq K(b - a)$.
- (a) On note m le milieu de $[a, b]$. Montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois $\|\varphi(m) - \varphi(a)\| < K(m - a)$ et $\|\varphi(b) - \varphi(m)\| < K(b - m)$.
- (b) Montrer à l'aide de (a) qu'il existe une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$ tels que $\text{diam}(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$ et $\left\| \frac{\varphi(b_n) - \varphi(a_n)}{b_n - a_n} \right\| \geq K$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\|\varphi'(c)\| \geq K$.
- (2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 27. (exponentielles de matrices)

- (1) Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{M^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On pose

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

- (2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.
- (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la dérivée de l'application $p_k : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $p_k(t) = t^k A^k$?
- (b) Montrer que l'application $t \mapsto e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et qu'on a

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

Exercice 28. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$.

- (1) Montrer que A et B commutent avec e^{tA} , e^{tB} et $e^{t(A+B)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (2) En utilisant (1) et l'exercice 27, montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ est constante.
- (3) Montrer qu'on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 29. (groupes à un paramètre)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $\Phi(0) = I$ et $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = e^{tA}$

- (1) Quelle est la limite de $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Phi(s) ds$ quand δ tend vers 0^+ ?

- (2) Dédurre de (1) qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que la matrice $M(\delta) = \int_0^\delta \Phi(s) ds$ est inversible.
- (3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_t^{t+\delta} \Phi(u) du = M(\delta)\Phi(t)$, et en déduire que Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (4) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (5) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. (intégrales à paramètres)

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et soit $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que Φ possède une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en tout point $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, et que la fonction $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times [0, 1]$.

- (1) Pour $x \in [a, b]$, on note $\Phi(x, \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$. Montrer que l'application $x \mapsto \Phi(x, \cdot)$ est dérivable de $[a, b]$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ et a pour dérivée l'application $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \cdot)$.
- (2) Soit $L : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $L(u) = \int_0^1 u(t) dt$. Montrer que L est continue.
- (3) On définit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_0^1 \Phi(x, t) dt$. Dédurre de (1) et (2) que φ est dérivable sur $[a, b]$ et donner une formule pour $\varphi'(x)$.

Exercice 31. Soit $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $x \in [0, 1]$, on note $\Phi_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Phi_x(t) = \Phi(x, t)$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction Φ_x est continue sur $[0, 1]$. On a donc une application $x \mapsto \Phi_x$ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

- (1) Montrer que si Φ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, alors l'application $x \mapsto \Phi_x$ est continue de $[a, b]$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.
- (2) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, la forme linéaire $\delta_t : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta_t(u) = u(t)$ est continue sur $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. En déduire que si l'application $x \mapsto \Phi_x$ est dérivable en un point x_0 , alors Φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en tout point (x_0, t) , $t \in [0, 1]$.
- (3) Dans cette question, on prend pour Φ la fonction définie

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} x - t & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$$

Montrer que l'application $x \mapsto \Phi_x$ est continue de $[0, 1]$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, mais n'est dérivable en aucun point.