Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 12 Janvier 2012

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle, et pour $r > 0$, on pose $\Omega_r = \{X \in M_n(\mathbb{R});\ \|X\| < r\}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall U, V \in \Omega_r\ :\ \|V^2 - U^2\| \leq 2r\,\|V - U\|\,.$$

(2) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 0\}$. Montrer que la formule
$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)\sin(ny)\,e^{-nxy}$$
a un sens pour tout $(x,y) \in \Omega$ et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

(3) Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on note $u^* :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$u^*(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(a) Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\frac{\partial u^*}{\partial r}$ et $\frac{\partial u^*}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, et en déduire les formules
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^* = \cos\theta\,\dfrac{\partial u^*}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\dfrac{\partial u^*}{\partial \theta} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^* = \sin\theta\,\dfrac{\partial u^*}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial u^*}{\partial \theta} \end{cases}$$

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot$ Montrer que
$$(\Delta f)^* = \frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f^*}{\partial \theta^2}\,\cdot$$

(4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $Df(0,0) = 0$. On suppose que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq 1 \ , \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq 4 \ \text{et} \ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right| \leq 2 \, .$$
En utilisant la formule de Taylor, montrer que
$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |f(u,v) - f(0,0)| \leq \frac{1}{2}\left(|u| + 2|v|\right)^2 \, .$$
(5) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y,z) = 18x^3 + 10x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 6xy - 36x.$$
(6) Soient u et v deux fonctions convexes positives de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $u''(t)u(t) \geq u'(t)^2$ et $v''(t)v(t) \geq v'(t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = u(x)v(y)$ est convexe.
(7) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $|\alpha\beta| > 1$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (\cos x + \alpha y, \sin y + \beta x)$. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ |\gamma(x)| = 1$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \gamma(x) = e^{i\theta(x)}$.

(1) Soient $v_1, \ldots, v_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. On suppose qu'on a
$$\forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \ : \ \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, .$$
(a) Soit $\Phi : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Phi(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \, v_k(tx)$.
(i) Montrer que si $j \in \{1,\ldots,n\}$, alors $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t,x) = v_j(tx) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\Big[v_j(tx)\Big]$.
(ii) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall j \in \{1,\ldots,n\} \ : \ \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t,x)\,dt = v_j(x)$.
(b) Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que
$$\forall j \in \{1,\ldots,n\} \ : \ \frac{\partial f}{\partial x_j} = v_j \, .$$
(2) En dérivant $|\gamma(x)|^2 = \gamma(x)\,\overline{\gamma(x)}$, montrer que pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, la fonction $v_j = \frac{1}{i\gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial x_j}$ est à valeurs réelles.
(3) Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall j \in \{1,\ldots,n\} \ : \ \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{i\gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial x_j}$.
(4) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-if(x)}\gamma(x)$ est constante.
(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

(1) Soient $b_1,\ldots,b_n$ des nombres réels positifs, et soit
$$\Sigma=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^p=1\right\}.$$
Justifier l'existence de
$$M(b_1,\ldots,b_n)=\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma}\sum_{i=1}^n b_ix_i\,.$$

(2) Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma$. On suppose qu'on a $x_1=0$ et $x_2>0$.

(a) Pour ε vérifiant $0<\varepsilon<x_2$, on pose $x(\varepsilon)=(\varepsilon,(x_2^p-\varepsilon^p)^{1/p},x_3,\ldots,x_n)$. Montrer que $x(\varepsilon)\in\Sigma$.

(b) On note $x_1(\varepsilon),\ldots,x_n(\varepsilon)$ les coordonnées de $x(\varepsilon)$. Montrer que si $b_1,\ldots,b_n>0$ alors
$$\sum_{i=1}^n b_ix_i(\varepsilon)=\sum_{i=1}^n b_ix_i+b_1\varepsilon+o(\varepsilon)$$
quand $\varepsilon\to 0$, et en déduire que $\sum_1^n b_ix_i<M(b_1,\ldots,b_n)$.

(3) Soient $b_1,\ldots,b_n>0$, et soit $(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma$ tel que $\sum_1^n b_ix_i=M(b_1,\ldots,b_n)$.

(a) En utilisant (2), montrer que tous les x_i sont strictement positifs.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel μ tel que
$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}\ :\ b_i=\mu x_i^{p-1}\,.$$

(c) On pose $M=M(b_1,\ldots,b_n)$. Montrer qu'on a $M=\mu$, puis que $x_i=\left(\frac{b_i}{M}\right)^{q/p}$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$.

(d) En déduire la valeur de $M(b_1,\ldots,b_n)$.

(4) Montrer que si $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ sont des nombres réels positifs, alors
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$