Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 7 Mars 2012

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle. Montrer que si $H \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|H\| < 1$ alors $Id - H$ est inversible et

$$(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k \,,$$

où la série converge dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit F un espace de Banach, et soit $\varphi : [0,1] \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'on a $\varphi'(0) = 0$, et $\|\varphi''(t)\| \leq t^2 - \frac{t^3}{2}$ pour tout $t \in [0,1]$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{7}{120}$.

(3) Pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

  (a) Montrer que f_α possède des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.

  (b) Montrer que si $\alpha < 1/2$, alors f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels, et soit (b_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $b(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $b_n(x,y) \geq n\, b(x,y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supose également qu'il existe une fonction continue $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\left|\frac{\partial b_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq M(x,y)$ et $\left|\frac{\partial b_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq M(x,y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la formule

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-b_n(x,y)}$$

a un sens pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(5) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$.

(6) Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\Phi(u,v,w) = (u \sin v \cos w, u \sin v \sin w, u \cos v)\,.$$

Montrer que Φ est un difféomorphisme local en tout point (u,v,w) tel que $u \neq 0$ et $\sin v \neq 0$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qu'on notera $(p,v,t) \mapsto f(p,v,t)$. On suppose que les dérivées partielles de f ne s'annulent en aucun point. Soient également P, V, T trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'on notera $(v,t) \mapsto P(v,t)$, $(p,t) \mapsto V(p,t)$ et $(p,v) \mapsto T(p,v)$. On suppose que pour tout point $(p,v,t) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(p,v,T(p,v)) = f(p,V(p,t),t) = f(P(v,t),v,t) = 0\,.$$

(1) Dériver la relation $f(p,v,T(p,v)) = 0$ par rapport à p, puis exprimer $\frac{\partial T}{\partial p}$ à l'aide des dérivées partielles de f.

(2) Exprimer $\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\frac{\partial P}{\partial v}$ à l'aide des dérivées partielles de f.

(3) Montrer que si p, v, t vérifient $p = P(v,t)$, $v = V(p,t)$ et $t = T(p,v)$, alors

$$\frac{\partial P}{\partial v}(v,t) \times \frac{\partial V}{\partial t}(p,t) \times \frac{\partial T}{\partial p}(p,v) = -1\,.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle et on fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A - Id\| \leq \frac{1}{6}\cdot$

(1) En utilisant une des questions de cours, montrer que la matrice A est inversible et qu'on a

$$\|Id - A^{-1}\| \leq \frac{1}{5}\cdot$$

(2) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f(X) = 2X - XAX\,.$$

(a) Calculer $f(A^{-1})$.

(b) Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout point $X \in M_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|Df(X)\| \leq \|Id - AX\| + \|Id - XA\|\,.$$

(3) Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, démontrer les deux implications suivantes :

$$\|X - Id\| \leq \frac{1}{5} \Longrightarrow \|X - A^{-1}\| \leq \frac{2}{5}\,;$$

$$\|X - A^{-1}\| \leq \frac{2}{5} \Longrightarrow \|AX - Id\| \leq \frac{7}{15} \text{ et } \|XA - Id\| \leq \frac{7}{15}\cdot$$

(4) On pose

$$\mathbb{B} = \left\{ X \in M_n(\mathbb{R});\ \|X - A^{-1}\| \leq \frac{2}{5} \right\}.$$

Montrer qu'il existe une constante $k < 1$ à préciser telle que l'application f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{B}$.

(5) Soit $X_0 \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|X_0 - Id\| \leq \frac{1}{5}\cdot$ On définit une suite $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par la récurrence $X_{m+1} = f(X_m)$. Montrer que $X_m \in \mathbb{B}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que la suite (X_m) converge vers A^{-1}.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$ et des nombres réels $b_1, \ldots, b_n$. On suppose que la matrice A est positive, avec $A \neq 0$. Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on pose

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot$$

(1) On note $Tr(M)$ la trace d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si A' une matrice diagonale à coefficients positifs et si H' est une matrice positive, alors $Tr(A'H') \geq 0$.

(b) En déduire que si H est une matrice positive, alors $Tr(AH) \geq 0$.

(2) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que si $x \in \Omega$ vérifie $Du(x) = 0$, alors

$$Lu(x) = Tr(AH_u(x))\,,$$

où $H_u(x)$ est la matrice hessienne de u au point x.

(3) Déduire de (1) et (2) que si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et si u possède un maximum local en un point $z \in \Omega$, alors $Lu(z) \leq 0$.

(4) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est notée $\partial\Omega$, et soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω. On suppose qu'on a $Lu(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(a) On rappelle que $A \neq 0$. En considérant la trace de la matrice A, montrer qu'il existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{ss} > 0$.

(b) Justifier l'existence d'un nombre réel λ tel que $\lambda^2 a_{ss} + \lambda b_s > 0$.

(c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $u_m : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ par
$$u_m(x) = u(x) + 2^{-m} e^{\lambda x_s} ,$$
où x_s est la s-ème coordonnée de x. Montrer qu'on a $Lu_m(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(d) Soit $m \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'un point $z_m \in \overline{\Omega}$ tel que
$$\forall x \in \Omega \ : \ u_m(x) \leq u_m(z_m) ,$$
et montrer à l'aide de (3) qu'on a nécessairement $z_m \in \partial\Omega$.

(e) Montrer que si $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\overline{\Omega}$ convergeant vers un point $\xi \in \overline{\Omega}$ et si $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers, alors $u_{m_k}(\xi_k)$ tend vers $u(\xi)$ quand $k \to \infty$.

(f) Montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a
$$u(x) \leq \sup\{u(\xi);\ \xi \in \partial\Omega\} .$$