Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

DS du 7 Novembre 2011

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $L : E \to F$ une application linéaire. On suppose que l'application bilinéaire $B : E \times F^* \to \mathbb{R}$ définie par $B(x, \Theta) = \Theta(L(x))$ est continue. (*Rappel* : F^* est l'espace $\mathcal{L}(F, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur F). En utilisant le lemme de scalarisation, montrer que L est continue.

(2) Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : [0,1] \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq t + t^3$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq 3/4$.

(3) Montrer que l'application $X \mapsto X^3$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.

(4) Pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Montrer que f_α possède des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.

(b) Montrer que si $\alpha < 1/2$, alors f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle différentiable en $(0,0)$?

(5) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = g(4x + y - 2z, 2x - 7y + 4z)\,.$$

Montrer que la fonction f vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Exercice 1. Dans tout l'exercice, E est un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E. On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est *complet* pour sa norme naturelle. Si $A, B \in \mathcal{L}(E)$, on pose $AB = A \circ B$. Si $X \in \mathcal{L}(E)$, on pose $X^0 = Id$ et $X^n = \underbrace{X \circ \cdots \circ X}_{n \text{ fois}}$ pour $n \geq 1$.

(1) Soit $X \in \mathcal{L}(E)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation y a-t-il entre $\|X^n\|$ et $\|X\|^n$?

(2) Montrer que si $X \in \mathcal{L}(E)$, alors les séries $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1}$ convergent dans $\mathcal{L}(E)$. Dans la suite, on posera

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}, \\ \mathbf{s}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1}. \end{aligned}$$

(3) Calculer $\mathbf{c}(0)$ et $\mathbf{s}(0)$.

(4) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on a $\gamma(t)\gamma'(t) = \gamma'(t)\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\gamma_n(t) = \gamma(t)^n$. Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que γ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour $n \geq 1$ on a

$$\gamma_n'(t) = n\gamma(t)^{n-1}\gamma'(t).$$

(b) Montrer que les fonctions $t \mapsto \mathbf{c}(\gamma(t))$ et $t \mapsto \mathbf{s}(\gamma(t))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(\mathbf{c}(\gamma(t)\big) &= -\mathbf{s}(\gamma(t))\,\gamma'(t), \\ \frac{d}{dt}\big(\mathbf{s}(\gamma(t)\big) &= \mathbf{c}(\gamma(t))\,\gamma'(t). \end{aligned}$$

(c) Montrer aussi que $\mathbf{c}(\gamma(t))\gamma'(t) = \gamma'(t)\mathbf{c}(\gamma(t))$ et $\mathbf{s}(\gamma(t))\gamma'(t) = \gamma'(t)\mathbf{s}(\gamma(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(5) Soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant $AB = BA$.

(a) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = \mathbf{c}(tA)\mathbf{c}((1-t)A+B) - \mathbf{s}(tA)\mathbf{s}((1-t)A+B)$. En utilisant (**??**), montrer que la fonction φ est constante.

(b) Établir la formule $\mathbf{c}(A+B) = \mathbf{c}(A)\mathbf{c}(B) - \mathbf{s}(A)\mathbf{s}(B)$.

(c) Que devient cette identité lorsque $B = -A$?

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on se donne une *loi de groupe* sur $\mathbb{R}$, autrement dit une application $(x, y) \mapsto x * y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $x * (y * z) = (x * y) * z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(ii) il existe un (unique) $e \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{R} \,:\, z * e = z = e * z$;

(iii) tout élément $x \in \mathbb{R}$ possède un “inverse” noté x^{-1}, qui est l'unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x * y = e = y * x$.

On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\pi(x, y) = x * y$, et on suppose que π est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Écrire la propriété (i) en utilisant l'application π, et en déduire que pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a
$$\partial_2\pi(x * y, z) = \partial_2\pi(x, y * z) \times \partial_2\pi(y, z)\,.$$
(2) Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}\ :\ \partial_1\pi(z, e) = 1 = \partial_2\pi(e, z)$.
(3) En utilisant (1) et (2), montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\ :\ \partial_2\pi(y^{-1}, y) \times \partial_2\pi(y, e) = 1$.
(4) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose
$$\varphi(t) = \int_e^t \frac{1}{\partial_2\pi(s, e)}\, ds\,.$$
(a) Justifier la définition, puis montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une formule pour $\varphi'(t)$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $y \mapsto \varphi(\pi(x, y)) - \varphi(y)$ est constante.
(c) En déduire que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)\,.$$
(5) Déduire de (4) que le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est *commutatif* : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors
$$x * y = y * x\,.$$