Feuille d'exercices n^{o} 5

Exercice 1. (prolongement de ζ)

(1) Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \,.$$

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, la formule $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Soit $n \geq 1$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $t \in [n, n+1]$, alors

$$\left| \frac{1}{t^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \,.$$

En déduire une majoration pour $|\varphi_n(s)|$.

(4) Montrer que la fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{1\}$, où $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Exercice 2. (prolongement de Γ)

(1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(z) > 0$, alors

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \,.$$

(2) Montrer que la formule $\Phi(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Montrer que la fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Exercice 3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa **transformée de Fourier** $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \,.$$

On ne suppose connu aucun résultat sur la transformation de Fourier (en particulier, on ne tiendra pas pour acquis le fait que si $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$).

(1) On suppose que f est bornée et à support compact. Montrer que $\widehat{f}$ se prolonge de manière unique en une fonction Φ holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donner une expression intégrale pour les dérivées de Φ en 0.
(2) On suppose que f est continue à support compact, et que $\widehat{f}$ est également à support compact.
  (a) Montrer que $\Phi = 0$,.
  (b) En déduire qu'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P(t)\,dt = 0$ pour tout polynôme P.
  (c) Montrer que $f = 0$.

Exercice 4. (transformée de Fourier de la Gaussienne)

(1) Montrer que la formule $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, e^{-itz}\,dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(2) Calculer $\Phi(iy)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}\,.$$

Exercice 5. (transformée de Laplace)

Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ existe, au sens où $\int_0^X f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $X \to \infty$. On ne suppose *pas* que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}\,.$$

(1) Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$.
  (a) Pourquoi la fonction F est-elle bornée sur $[0,\infty[$?
  (b) En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante C telle que : pour tous A, B tels que $0 < A < B$ et pour tout $s \in \Omega$, on a

$$\left| \int_A^B f(t)e^{-st}dt \right| \leq |F(B)| + |F(A)| + C\,\frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\, e^{-\mathrm{Re(s)}A}\,.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \Omega \to \mathbb{C}$ par $L_n(s) = \int_0^n f(t)e^{-st}dt$. Montrer que L_n est holomorphe sur Ω.
(3) Montrer que la formule

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

a un sens pour tout $s \in \Omega$, et que la fonction Lf est holomorphe sur Ω.

Exercice 6. (inégalité de Hölder)
Dans tout l'exercice, I est un intevalle de $\mathbb{R}$ et f et g sont des fonctions mesurables strictement positives sur I.

(1) On note V la bande $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Montrer que si f et g sont *intégrables* sur I, alors la formule
$$\Psi(z) = \int_I f(t)^{1-z} g(t)^z \, dt$$
définit une fonction continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V.

(2) On suppose que f et g sont intégrables sur I. Pour $z \in \overline{V}$, on pose
$$\Phi(z) = \frac{\int_I f(t)^{1-z} g(t)^z \, dt}{\left(\int_I f(t)\, dt\right)^{1-z} \left(\int_I g(t)\, dt\right)^{z}} \cdot$$
 (a) Montrer que Φ est continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V.
 (b) Montrer que si $z = x + iy \in \overline{V}$, alors $|\Phi(z)| \leq |\Phi(x)|$. En déduire d'une part que Φ est bornée sur $\overline{V}$, et d'autre part qu'on a $|\Phi(\xi)| \leq 1$ pour tout $\xi \in \partial V$.
 (c) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z) e^{\varepsilon z^2}$.
  (i) Montrer que $|\Phi_\varepsilon(z)|$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, et qu'on a $|\Phi_\varepsilon(\xi)| \leq e^{\varepsilon}$ pour tout $\xi \in \partial V$.
  (ii) En déduire qu'on a $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq e^{\varepsilon}$ pour tout $z \in \overline{V}$.
 (d) Montrer qu'on a $|\Phi(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{V}$, et conclure que si $\alpha \in [0, 1]$, alors
$$\int_I f(t)^{1-\alpha} g(t)^\alpha \, dt \leq \left(\int_I f(t)\, dt\right)^{\alpha} \left(\int_I g(t)\, dt\right)^{1-\alpha} .$$

(3) Démontrer l'inégalité de Hölder pour f et g.

Exercice 7. (formule des compléments)

(1) En utilisant convenablement le théorème de changement de variables, montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)} \cdot$$

(2) En utilisant un calcul fait en cours, en déduire la formule des compléments : si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi\, z} \cdot$$

Exercice 8. Montrer que pour $s > 1$, on a

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt\ .$$

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 .$$

(1) Montrer qu'on définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en posant

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \cdot$$

(2) Montrer que si $w = a + ib \in \mathbb{C}$ (où a et b sont réels), alors $|\sin w|^2 \geq \operatorname{sh}^2 b$.

(3) On définit $\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 - g(z)\,.$$

(a) Montrer que la fonction Φ est 1-périodique (i.e. $\Phi(z+1) = \Phi(z)$).

(b) Montrer à l'aide d'un développement limité que $(\pi/\sin(\pi z))^2 - 1/z^2$ admet une limite en 0.

(c) En déduire que la fonction Φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique. Dans la suite, on note encore Φ cette fonction.

(d) Montrer que si $z = x + iy$ avec $|y| > 1$ et $-1/2 \leq x \leq 1/2$, alors

$$|\Phi(z)| \leq \left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi}\right)^2 + 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} \cdot$$

En déduire que Φ est bornée sur la bande $\{-1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2\}$.

(e) Montrer que la fonction Φ est constante.

(4) Montrer qu'on a $\lim_{y\to+\infty} g(iy) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty} |\sin(\pi i y)| = +\infty$.

(5) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 10. Montrer que le produit infini $\prod_{k\geq 0}(1 + z^{2^k})$ converge normalement sur tout compact du disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, et qu'on a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z} \cdot$$

Exercice 11. (théorème de Weierstrass)

Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n.

(1) On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) = (1 - z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) .$$

(a) Calculer $W_p'(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(b) En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$1 - W_p(z) = z^{p+1}\varphi_p(z)\,,$$

où φ_p est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ s'écrivant $\varphi_p(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ avec des coefficients a_n *positifs*.

(c) Déduire de (b) que si $|z| \leq 1$, alors

$$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

(2) Montrer que la série $\sum(\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.