Feuille d'exercices n^{o} 1

Exercice 1. Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Établir les formules suivantes :

(a) $d(fg) = fdg + gdf$, et $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$ si g ne s'annule pas.

(b) $\frac{\partial(fg)}{\partial z} = g\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial z}$ et $\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\cdot$

(c) $d(\log f) = df/f$ si f est à valeurs strictement positives.

Exercice 2. Déterminer dF, $\frac{\partial F}{\partial z}$ et $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ dans les cas suivants, en précisant sur quel domaine F est de classe $\mathcal{C}^1$: $F(z) = |z|^2$; $F(z) = \log|z|$; $F(z) = |z|$.

Exercice 3. Calculer $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$ lorsque P est une fonction polynomiale.

Exercice 4. (conjugaisons)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si ω est une 1-forme différentielle sur Ω, on définit une 1-forme $\overline{\omega}$ en posant $\omega^*(p)h = \overline{\omega(p)h}$.

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $d\bar{f} = (df)^*$.

(2) Montrer que si $\omega = Adz + Bd\bar{z}$, alors $\omega^* = \overline{B}dz + \overline{A}d\bar{z}$.

(3) Déduire de (1) et (2) que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$ et $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit $f = u + iv \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour tout $z \in \Omega$, on note $J_f(z)$ le déterminant Jacobien de f au point z. Montrer qu'on a

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

Exercice 6. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soient $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Exprimer $d(g \circ f)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, df et $d\bar{f}$.

(2) En déduire les formules suivantes :

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\circ f\right)\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}\,,$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\circ f\right)\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\,.$$

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que la fonction f^* définie par $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega^* = \{z;\ \bar{z} \in \Omega\}$.

Exercice 8. Écrire l'équation de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et déterminer ses points de $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = e^{-1/z^4}$ si $z \neq 0$.

(1) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0, et que l'équation de Cauchy-Riemann est vérifiée en ce point.
(2) La fonction f est elle holomorphe?

Exercice 11. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que f ne prend que des valeurs réelles. Montrer que f est constante.

Exercice 12. (transformation de Cayley)
Montrer que l'application $z \mapsto i\,\frac{1+z}{1-z}$ est une bijection holomorphe du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ sur le demi-plan $U = \{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(w) > 0\}$.

Exercice 13. (Laplacien)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on pose $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Montrer qu'on a

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \cdot$$

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe, supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f' est holomorphe.

Exercice 15. (Fonctions harmoniques)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$.

(1) Montrer que toute fonction holomorphe (de classe $\mathcal{C}^2$) est harmonique, et que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.
(2) On suppose que Ω est un disque ou un rectangle, de centre $z_0 = (x_0, y_0)$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0)\, ds\,.$$
Montrer que la fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(3) Conclure que si Ω est un disque ou un rectangle, alors une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Exercice 16. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

(1) Montrer qu'on a $d(\log|f|) = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\right)$.
(2) Déduire de (1) que si f est holomorphe, alors $\log|f|$ est harmonique.
(3) On veut redémontrer le résultat de (2) par une autre méthode.
  (a) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 et une fonction g holomorphe sur U telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in U$. Exprimer $\log|f(z)|$ à l'aide de $g(z)$.
  (b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 17. Soient V_1, V_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soient $f : V_1 \to V_2$ et $u : V_2 \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) En utilisant l'exercice 6, montrer que si f est holomorphe, alors $\frac{\partial(u\circ f)}{\partial z} = f' \times (\frac{\partial u}{\partial z} \circ f)$ et $\frac{\partial(u\circ f)}{\partial \bar{z}} = \overline{f'} \times (\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f)$.
(2) On suppose que u et f sont de classe $\mathcal{C}^2$, et que f est holomorphe. Déduire de (1) qu'on a $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f)$.
(3) Conclure que si f est holomorphe et u harmonique, alors $u\circ f$ est harmonique.

Exercice 18. (fonctions harmoniques radiales)

(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, exprimer Δf en coordonnées polaires.
(2) Déterminer toutes les fonctions f harmoniques dans $\mathbb{C}^*$ telles que $f(z)$ ne dépend que de $|z|$.

Exercice 19. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors

$$\Delta(|f|^2) = 4\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{f}\,\Delta f) + 4\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 20. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On suppose que la fonction $\sum_1^n |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les f_i sont constantes.

Exercice 21. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :
$\sum \frac{n^\alpha}{n!} z^n,\ \alpha > 0$; $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$; $\sum \frac{1+a^n}{1+n^a} z^n,\ a > 0$; $\sum (1 + (-1)^n)^n z^n$; $\sum \frac{z^{n^2}}{n^n}$.

Exercice 22. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}$ se développe en série entière dans le disque unité $\mathbb{D}$, et trouver les coefficients de son développement.

Exercice 23. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ la somme d'une série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$.

(1) On note Ω le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) < 1/2\}$. Montrer que la formule

$$F(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

a un sens pour tout $z \in \Omega$, et définit une fonction holomorphe dans Ω.

(2) Montrer que dans le disque $D(0,1/2)$, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) z^n \, .$$

Exercice 24. Soit $\mathbf{a} = (a_n)$ une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$.

(1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$? Dans la suite, on posera $S_{\mathbf{a}}(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$.

(2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$|e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x) - l| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n - l|}{n!} x^n + \sup_{n>N} |a_n - l| \, .$$

(3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x)$.

Exercice 25. (critères d'Abel)
Soit (a_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un même ensemble X, et soit (b_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble Y. Montrer que dans les deux cas suivants, la série de fonctions $\sum a_n(x)\, b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

(1) Les sommes partielles de la série $\sum a_n(x)$ sont uniformément bornées sur X, la suite $(b_n(y))$ tend vers 0 uniformément sur Y, et $\sum_{n=N}^\infty |b_{n+1}(y) - b_n(y)|$ tend vers 0 quand $N \to \infty$, uniformément sur Y.

(2) La série $\sum a_n(x)$ converge uniformément sur X, la suite $(b_n(y))$ est uniformément bornée sur Y, et il existe une constante C telle que $\forall y \in Y$: $\sum_0^\infty |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C$.

Exercice 26. (théorème d'Abel)
Soit $S(z) = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série $\sum c_n$ converge.

(1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 25), montrer que la série $S(r)$ converge uniformément par rapport à $r \in [0,1]$.
(2) On note f la somme de la série S dans le disque $\mathbb{D} = D(0,1)$. Montrer que $f(r)$ tend vers $\sum_0^\infty c_n$ quand r tend vers 1^-.

Exercice 27. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Exercice 28. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $0 \leq c < d \leq \pi$. Déterminer et dessiner l'image du rectangle $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par la fonction exponentielle.

Exercice 29. (formule d'Euler)
Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $e^z = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

Exercice 30. Énoncer et démontrer les formules "bien connues" pour $\cos(u+v)$ et $\sin(u+v)$, où $u, v \in \mathbb{C}$.

Exercice 31. Montrer que pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a les identités suivantes :

$$\begin{cases} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \quad \text{et} \quad |\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x\,.$$

Exercice 32. (forme complexe de l'arctangente)
(1) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1+it}{1-it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
(2) Soient $w, z \in \mathbb{C}$, et soit $\xi = e^{iw}$. Montrer qu'on a $\tan(w) = z$ si et seulement si $\xi^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(t) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$.

Exercice 33. Résoudre l'équation $\cos z = 2$. (*Poser* $\xi = e^{iz}$).

Exercice 34. Pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(\tan(nz))$.

Exercice 35. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x + y > 0\}$. Dessiner Ω, vérifier que $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et déterminer l'image de Ω par la fonction Log.

Exercice 36. Soient L une détermination holomorphe du logarithme et Θ une détermination $\mathcal{C}^\infty$ de l'argument sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer L' et $d\Theta$.

Exercice 37. Soit L une détermination *continue* du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$.

(1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha)$, où Δ_α est la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$.
(2) Avec les notations de (1), montrer que la fonction $L - \mathrm{Log}_\alpha$ est constante sur $D(z_0, r)$.
(3) Montrer que L est holomorphe sur Ω.

Exercice 38. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) g est un logarithme de f, i.e. $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$;
(ii) $g' = f'/f$ et $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ pour au moins un point $z_0 \in \Omega$.

Exercice 39. (deux formules classiques)

(1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 25), montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.
(2) En déduire que pour tout point $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\mathrm{Log}(1 - \zeta) \ .$$

(3) Pour $x \in]0, 2\pi[$, établir les formules

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\log\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} \ .$$

Exercice 40. Calculer $\sqrt{4i}$.

Exercice 41. Calculer i^i et $(i^i)^i$.

Exercice 42. Déterminer l'image du demi-plan $U = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par la fonction $z \mapsto z^{1/4}$.

Exercice 43. On note $\sqrt{z}$ la détermination principale de $z^{1/2}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 44. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $z^{1/k}$ sur le cercle $\mathbb{T}$.