Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 16 Juin 2011

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Pour $a > 1$, on pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$.
   (a) Mettre $I(a)$ sous la forme $\int_{\partial\mathbb{D}} f_a(z)\, dz$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité $\{|z| < 1\}$ et la fonction f_a est à déterminer.
   (b) Calculer $I(a)$.

(2) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ en utilisant les domaines élémentaires $K_R = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\}$.

(3) Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3 = 0$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

(4) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs vérifiant $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\log n} = +\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-\varepsilon\lambda_n} = 0$.
   (b) Montrer que la formule $f(z) = \sum_0^\infty e^{-\lambda_n z}$ définit une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(5) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.
   (a) On note c_n les coefficients du développement de Laurent de f dans $\mathbb{C}^*$. Exprimer chaque c_n par une formule intégrale.
   (b) On suppose qu'on a $|f(z)| = o(1/|z|)$ au voisinage de 0. Montrer que f peut se prolonger en une fonction entière.
   (c) On suppose qu'on a $|f(z)| \leq \frac{14}{3+|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est identiquement nulle.

(6) Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur le disque $\Omega = D(0, 5)$ et vérifiant $f(1/n) = \frac{1}{5n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(1) Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On écrit $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = 0\,,$$

et en déduire l'identité

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\left[g(re^{i\theta})\right] e^{-in\theta}d\theta\,.$$

(b) On suppose que la fonction $\mathrm{Re}(g)$ est positive. Déduire de (a) qu'on a $|b_n| \leq 2\mathrm{Re}(b_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifiant $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On écrit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

(a) Montrer qu'on peut trouver $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| = 1$ et $\omega f(0)$ est réel positif.

(b) En appliquant (1) à $g(z) = 1 - \omega f(z)$, montrer qu'on a $|a_n| \leq 2(1 - |a_0|)$ pour tout $n \geq 1$.

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,(1/3)^n \leq 1\,.$$

(3) Le but de cette question est de montrer que l'inégalité de (2c) est optimale au sens suivant : si un nombre $\rho > 0$ vérifie $\sum_0^\infty |a_n|\,\rho^n \leq 1$ pour toute fonction $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $|f(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$, alors $\rho \leq 1/3$. Dans la suite, on fixe ρ vérifiant la propriété précédente.

(a) Pour $r \in]0, 1[$, on note $f_r : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_r(z) = \frac{r-z}{1-rz}\cdot$

(i) Montrer qu'on a $|f_r(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(ii) On écrit $f_r(z) = \sum_0^\infty a_{n,r} z^n$. Calculer les coefficients $a_{n,r}$.

(b) En utilisant (a), montrer que pour tout $r \in]0, 1[$, on a

$$r + (1 - r^2)\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\rho^n \leq 1\,.$$

(c) Calculer la somme apparaissant dans (b), et en déduire l'inégalité

$$\frac{\rho}{1 - r\rho} \leq \frac{1}{1 + r}\,\cdot$$

(d) Montrer que $\rho \leq 1/3$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n.

(1) Soit ψ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que la formule

$$\varphi(z) = \int_0^1 \psi(tz)\, dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et que si on note $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ le développement en série entière de φ, alors

$$a_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{(n+1)!} .$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soit ψ la fonction définie par

$$\psi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) .$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\psi^{(n)}(z) = Q_n(z)\psi(z) ,$$

où Q_n est un polynôme à coefficients positifs.

(3) On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) .$$

(a) Calculer $W_p'(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(b) En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et les questions précédentes, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$W_p(z) - 1 = z^{p+1}\varphi_p(z) ,$$

où φ_p est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ s'écrivant $\varphi_p(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ avec des coefficients a_n *positifs*.

(c) Déduire de (b) que si $|z| \leq 1$, alors

$$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

(4) Montrer que le produit infini $\prod(\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.