Corrigé succinct du DS

Questions de cours.

Tout a été fait en cours et/ou en TD.

Exercice 1. (1) La fonction $\varphi(x) = \frac{x^\alpha \log(x)}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,\infty[$, et elle se prolonge par continuité en 1 car $\frac{\log(x)}{x^2-1} = \frac{\log(x)}{(x-1)} \times \frac{1}{x+1}$ tend vers $1/2$ quand $x \to 1$. Donc φ (prolongée en 1) est intégrable sur tout intervalle compact $[a,b] \subset]0,\infty[$. On a $\varphi(x) \sim -x^\alpha \log(x)$ au voisinage de 0, donc φ est intégrable au voisinage de 0 car $\alpha > -1$; et $\varphi(x) \sim \frac{\log x}{x^{2-\alpha}}$ en $+\infty$, donc φ est intégrable à l'infini car $2-\alpha > 1$. Au total, φ est intégrable sur $]0,\infty[$ et I_α est bien définie.

(2) (a) Comme l'argument est pris dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$, on a $\log(-1) = \log(e^{i\pi}) = i\pi$ et $(-1)^\alpha = (e^{i\pi})^\alpha = e^{i\pi\alpha}$. En écrivant

$$f(z) = \frac{z^\alpha \log(z)}{(z-1)(z+1)}\,,$$

on voit que

$$f(-1+\varepsilon e^{it}) = \frac{(-1+\varepsilon e^{it})^\alpha \log(-1+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}\,(\varepsilon e^{it}-2)}\,,$$

donc $\varepsilon e^{it} f(-1+\varepsilon e^{it})$ tend vers $\frac{(-1)^\alpha \log(-1)}{-2} = -\frac{i\pi}{2}\, e^{i\pi\alpha}$ quand ε tend vers 0^+.

(b) On trouve de même $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon e^{it} f(1+\varepsilon e^{it}) = \frac{(1)^\alpha \log(1)}{2} = 0$.

(c) La fonction $z \mapsto z^\alpha \log(z)$ est continue sur le *compact* $K = \overline{D}(-1,1/2) \cup \overline{D}(1,1/2)$, donc elle y est bornée. On a ainsi une constante M telle que $|z^\alpha \log(z)| \le M$ sur K. Comme $1+\varepsilon e^{it}$ et $-1+\varepsilon e^{it}$ sont dans K si $\varepsilon \le 1/2$, on en déduit

$$\begin{aligned} |f(-1+\varepsilon e^{it})| &\le \frac{M}{|\varepsilon e^{it}\,(\varepsilon e^{it}-2)|} \\ &\le \frac{M}{\varepsilon\,(2-\varepsilon)} \\ &\le \frac{2M}{3\varepsilon} \end{aligned}$$

(car $2-\varepsilon \ge 3/2$) et de même pour $|f(1+\varepsilon e^{it})|$.

(d) On a $\int_{\gamma_\varepsilon^\pm} f(z)dz = i\int_0^\pi \varepsilon e^{it}\, f(\pm 1+\varepsilon e^{it})\,dt$. Tout a été fait pour qu'on puisse appliquer les questions précédentes et le théorème de convergence dominée : écrire les détails!

(3) (a) Pour l'inégalité, Il suffit d'écrire les choses soigneusement :

$$\begin{aligned}|f(\varepsilon e^{it})| &= \frac{\varepsilon^\alpha\,(|\log(\varepsilon)+it|}{|\varepsilon^2 e^{2it}-1|}\\ &\leq \frac{\varepsilon^\alpha(|\log(\varepsilon)|+|t|)}{1-|\varepsilon^2 e^{2it}|}\\ &\leq \frac{\varepsilon^\alpha(|\log(\varepsilon)|+\pi)}{1-\varepsilon^2}\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(\varepsilon e^i t)\,i\varepsilon e^{it}\,dt\right|\\ &\leq \int_0^\pi \frac{\varepsilon^\alpha(|\log(\varepsilon)|+\pi)}{1-\varepsilon^2}\,\varepsilon dt\\ &= \frac{\pi\varepsilon^{\alpha+1}(|\log(\varepsilon)|+\pi)}{1-\varepsilon^2}\,.\end{aligned}$$

Comme $\alpha+1>0$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\alpha+1}\log(\varepsilon)=0$, donc $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ tend vers 0 avec ε.

(b) On trouve de même $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=0$ en utilisant la majoration

$$|f(Re^{it})|\leq \frac{\varepsilon^\alpha(|\log(R)|+\pi)}{R^2-1}$$

et le fait que $\frac{\log(R)}{R^{1-\alpha}}$ tend vers 0 car $1-\alpha>1$.

(4) Faire le dessin soigneusement.

(5) On a

$$\begin{aligned}f(-x) &= \frac{(-x)^\alpha\log(-x)}{(-x)^2-1}\\ &= \frac{(xe^{i\pi})^\alpha\log(xe^{i\pi})}{x^2-1}\\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}x^\alpha(\log(x)+i\pi)}{x^2-1}\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(6) Pour $0<\varepsilon<1/2<1<R$, la fonction f est holomorphe au voisinage de $K_{\varepsilon,R}$. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz=0$, autrement dit

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)\,dx-\int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz+\int_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)\,dx-\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz+\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(x)\,dx&\\ -\int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)\,dz+\int_{1+\varepsilon}^R f(x)\,dx+\int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 0\,.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (5) on a

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)\,dx &= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(-x)\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} f(-x)\,dx \\ &= e^{i\pi\alpha}\left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx\right) + ie^{i\pi\alpha} A_{\varepsilon,R}\,,\end{aligned}$$

pour un certain $A_{\varepsilon,R} \in \mathbb{R}$ qu'il est inutile d'écrire explicitement. L'identité précédente s'écrit donc

$$\begin{aligned}(1+e^{i\pi\alpha})&\left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx\right) + ie^{i\pi\alpha} A_{\varepsilon,R} \\ &- \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon^+} f(z)\,dz \quad = 0\,.\end{aligned}$$

Compte tenu de toutes les questions précédentes, on en déduit, en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, que $A_{\varepsilon,R}$ admet une limite $A \in \mathbb{R}$ et qu'on a

$$(1+e^{i\pi\alpha})I_\alpha + ie^{i\pi\alpha}A - \frac{\pi^2}{2}\,e^{i\pi\alpha} = 0\,.$$

(7) En faisant ce qui est demandé, on trouve

$$(e^{-i\pi\alpha}+1)I_\alpha + iA = \frac{\pi^2}{2}\,\cdot$$

Comme A et I_α sont réels, on en déduit la valeur de I_α en regardant la partie réelle des deux membres, ce qui donne

$$I_\alpha = \frac{\pi^2}{2(1+\cos(\pi\alpha))}\,\cdot$$

Exercice 2. (1) Comme la série $\sum c_n$ est convergente, la suite (c_n) tend vers 0 et est donc bornée. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ est au moins égal à 1.

(2) Cela ressemble beaucoup à la preuve du théorème de Cesáro ou à certains exercices faits en TD (24 et 25, Feuille 1). En ce sens c'est presque une question de cours. Il faut **impérativement** savoir faire ce genre de démonstrations.

Comme la suite (a_n) est bornée (elle tend vers 0) et comme la série $\sum g_n(z)$ est absolument convergente, la série $\sum a_n g_n(z)$ est absolument convergente (et donc convergente) pour tout $z \in \mathbb{S}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a_n \to 0$, on peut trouver N_0 tel que $|a_n| < \varepsilon$ pour $n > N_0$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(z)\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{N_0} a_n g_n(z)\right| + \sum_{n>N_0} \varepsilon\,|g_n(z)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_0} |a_n g_n(z)| + C\,\varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathbb{S}$. Comme $g_n(z) \to 0$ quand $z \to 1$ pour tout n, la somme finie $\alpha(z) = \sum_1^{N_0} a_n g_n(z)$ tend vers 0 quand $z \to 1$. On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $|\alpha(z)| < \varepsilon$ pour $|z-1| < \delta$, et on a ainsi

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(z)\right| < \varepsilon + C\,\varepsilon = (C+1)\,\varepsilon$$

pour tout $z \in \mathbb{S}$ vérifiant $|z-1| < \delta$. Comme ε est arbitraire, cela montre que $\sum_1^{\infty} a_n g_n(z)$ tend vers 0 quand $z \to 1$.

(3) On a $c_n = R_n - R_{n+1}$, et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (R_n - R_{n+1})\,z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} R_n z^{n-1} \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n (z^n - z^{n-1})\,,\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

(4) Comme la série $\sum c_n$ converge, le "reste" R_n tend vers 0 quand $n \to \infty$.

(5) (a) Faire le dessin!

(b) On a $|z^n - z^{n-1}| = |z|^{n-1}\,|z-1| \leq C_\alpha\,|z|^{n-1}\,(1-|z|) = C_\alpha\,(|z|^{n-1} - |z|^n)$, et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z^n - z^{n-1}| \leq C_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (|z|^{n-1} - |z|^n) = C_\alpha\,,$$

car la somme à droite est "télescopique" et $|z|^n \to 0$ quand $n \to \infty$.

(6) Tout a été fait pour pouvoir appliquer (2) avec $a_n = R_n$ et $g_n(z) = z^n - z^{n-1}$. Vérifier!

(7) La série $\sum c_n$ converge car c'est une série alternée dont le terme général décroit vers 0. Pour $z \in \mathbb{D}$, on a (cf cours)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(1+z)\,,$$

où log est la détermination principale du logarithme. En appliquant (6) avec $\alpha = 0$ (donc $\mathbb{S}_\alpha = [0,1[$), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -\lim_{r \to 1^-} \log(1+z) = -\log 2\,.$$

(8) C'était hors-barême. Le faire en exercice.