Feuille d'exercices n^o 4

Exercice 1. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5 + x^{3/2}$. calculer la longueur du graphe de f.

Exercice 2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $M = (1,1)$.

Exercice 3. Calculer la longueur du chemin $\gamma : [\pi/4, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = (\cos t + \ln(\tan(t/2)), \sin t)\,.$$

Exercice 4. Soient $a, b > 0$, et soit $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$ défini par $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Dessiner la courbe paramétrée par γ, et calculer sa longueur.

Exercice 5. Soient p et q deux points de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}_{p,q}$ l'ensemble de tous les chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

(1) Montrer que si $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$, alors

$$\overrightarrow{pq} = \int_0^1 \overrightarrow{\gamma'(t)}\, dt\,.$$

En déduire qu'on a

$$\|\overrightarrow{pq}\| = \int_0^1 \overrightarrow{\gamma'(t)} \cdot \frac{\overrightarrow{pq}}{\|\overrightarrow{pq}\|}\, dt\,.$$

(2) En utilisant (1), montrer que la longueur de tout chemin $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ est au moins égale à $\|\overrightarrow{pq}\|$.

(3) Trouver un chemin $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ tel que $l(\gamma) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

(4) Soit $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ vérifiant $l(\gamma) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

(a) Montrer qu'on a $\left\|\overrightarrow{p\gamma(t)}\right\| + \left\|\overrightarrow{q\gamma(t)}\right\| \leq \|\overrightarrow{pq}\|$ pour tout $t \in [0,1]$.

(b) Montrer que l'image de γ est le segment $[p,q]$.

Exercice 6. (paramétrage par longueur d'arc)
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

(1) Montrer que l'application s définie par $s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{\gamma'(u)}\|\, du$ est strictement croissante et calculer sa dérivée.

(2) On note l la longueur de γ. Montrer qu'il existe un chemin $\gamma_0 : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant les propriétés suivantes : γ_0 paramètre la même courbe que γ, et $\|\overrightarrow{\gamma_0'(s)}\| = 1$ pour tout $s \in [0,l]$.

Exercice 7. (longueur en coordonnées polaires)

(1) Soit $r : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par
$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\,\cos\theta, r(\theta)\,\sin\theta)\,.$$
Montrer que la longueur de γ est donnée par la formule
$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta.$$

(2) Soit $a > 0$. On note Γ la courbe d'équation polaire $r = a\,\theta$, avec $0 \le \theta \le 6\pi$. Dessiner Γ et calculer sa longueur.

(3) Soit $a > 0$. Calculer la longueur de la courbe Γ d'équation polaire $r = a\,(1+\cos\theta)$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.

Exercice 8. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \frac{-y}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy$, où Γ est le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice 9. Soit $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

(1) Trouver une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\omega = dF$.

(2) Calculer $\int_\gamma \omega$, où γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant $(0,0)$ à $(2,4)$.

Exercice 10. Calculer $\int_\gamma 2xydx + (x^2+2y)dy$, où $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Exercice 11. Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma x^2dx + y^2dy$, où Γ est l'arc de la courbe d'équation $x^2 - y^2 = a^2$ joignant le point $(a,0)$ au point $(\sqrt{2}\,a, a)$.

Exercice 12. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$, et soit ω la forme différentielle sur Ω définie par
$$\omega = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \left(\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y^2}\right)dy\,.$$
Calculer l'intégrale $\int_\gamma \omega$, où γ est le chemin défini sur $[\pi/4, \pi/2]$ par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Exercice 13. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le bord du triangle de sommets $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, orienté dans le sens positif. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma (x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$.

Exercice 14. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le segment joignant les points $p = (1,0)$ et $q = (0,1)$

(1) Calculer $I = \int_\Gamma x^2 dy$ directement à partir de la définition.
(2) Retrouver la valeur de I en appliquant la formule de Green-Riemann dans le triangle $0pq$.

Exercice 15. Soit $\omega = (y^2 - x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^2 + 2xy)\,dy$. Soient également $p = (0,1)$ et $q = (1,0)$. On note γ_1 le segment $[p,q]$, et γ_2 le quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant p à q.

(1) Calculer $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$, d'abord directement, puis en utilisant la formule de Green-Riemann.
(2) Déterminer sans calcul la valeur de $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$.

Exercice 16. Calculer de deux manières $I = \int_\Gamma xy\,dx$, où Γ est le bord du carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Exercice 17. Soit $R > 0$. Calculer de deux manières l'intégrale $\int_\gamma y dx$, où $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

Exercice 18. Soit $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 4 \text{ et } \frac{x^2}{4} + y^2 > 1\Big\}$.

(1) Dessiner le domaine Ω.
(2) Calculer l'intégrale $\int_\Omega (y^2 - x^2)\,dxdy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 19. Soit $a > 0$, et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)\,.$$

Dans la suite, on note $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par γ.

(1) Montrer que la partie de Γ correspondant à $t \in [0, \pi/2]$ est le graphe de la fonction $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \big(a^{2/3} - x^{2/3}\big)^{3/2}$.
(2) Étudier la fonction f, puis tracer la courbe Γ.
(3) Calculer l'aire du domaine entouré par Γ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 20. Soit $a > 0$, et soit $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = (a\cos t(1 + \sin^2 t), a\sin^3 t)\,.$$

On note Γ l'image de γ. Calculer l'aire du domaine entouré par la courbe Γ.

Exercice 21. (aire en coordonnées polaires)

(1) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω. On suppose que Γ admet un paramétrage $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\,\cos\theta, r(\theta)\,\sin\theta)\,,$$

où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'aire de Ω est donnée par la formule

$$aire(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta\,.$$

(2) Soit $a > 0$. Déterminer l'aire du domaine entouré par la courbe Γ d'équation polaire $r = a\,(1+\cos\theta)$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.

(3) Soient $p > 0$ et $e \in]0,1[$. Déterminer l'aire du domaine entouré par la courbe Γ d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.

Exercice 22. (intégration par parties)
Dans tout l'exercice, $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω. Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$, on pose

$$[V]_\Sigma = \int_\Sigma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\Phi}\,.$$

(1) Montrer que si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (définis sur un même ouvert de $\mathbb{R}^2$), alors

$$\operatorname{div}(f\,\overrightarrow{V}) = f\operatorname{div}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{V}\,.$$

(2) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$, alors on a la formule d'"intégration par parties"

$$\int_\Omega f\operatorname{div}(\overrightarrow{V})\,dxdy = [f\overrightarrow{V}]_\Sigma - \int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} f)\cdot \overrightarrow{V}\,dxdy\,.$$

Exercice 23. (formule de Green)
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω. En utilisant l'exercice 22, montrer que si u et v sont des fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$, alors

$$\int_\Sigma \left(u\,\overrightarrow{\nabla} v - v\,\overrightarrow{\nabla} u\right)\cdot d\overrightarrow{\Phi} = \int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dxdy\,.$$

Exercice 24. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω.

(1) Soit h une fonction **harmonique** ($\Delta h = 0$) définie au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$. En appliquant la formule d'intégration par parties de l'exercice 22, montrer qu'on a

$$\int_\Omega \|\overrightarrow{\nabla} h\|^2 \, dxdy = \int_\Sigma (h \, \overrightarrow{\nabla} h) \cdot d\overrightarrow{\Phi} \, .$$

(2) Soient u et v deux fonctions harmoniques définies au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$. On suppose que u et v sont égales sur Σ.

(a) Déduire de (1) que la fonction $h = u - v$ est constante sur Ω.

(b) Montrer que u et v sont égales sur Ω.

Exercice 25. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine Ω, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\Omega \cup \Sigma$. On suppose que f est nulle sur Σ. En utilisant la formule d'intégration par parties de l'exercice 22 avec les champs de vecteurs constants $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'on a

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \, dxdy = 0 = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y} \, dxdy \, .$$

Exercice 26. (Green-Riemann et changement de variable)
Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme dont le Jacobien J_ϕ est partout > 0. Soit également $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine entouré par une courbe fermée régulière Γ. Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide de la formule de Green-Riemann, que l'aire de $\Phi(\Omega)$ est donnée par la formule

$$aire(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega J_\Phi(u, v) \, dudv \, .$$

(1) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ compatible avec l'orientation "positive". Justifier qu'on a

$$aire(\Phi(\Omega)) = \frac{1}{2} \int_{\Phi \circ \gamma} xdy - ydx \, .$$

(2) On écrit $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$. Montrer qu'on a

$$\int_{\Phi \circ \gamma} xdy - ydx = \int_\gamma \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial X}{\partial u} \right) du + \left(X \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial X}{\partial v} \right) dv \, .$$

(3) Démontrer la formule souhaitée.