Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\, y > 0\,,\, x^2 + y^2 < 1\}$. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$I_\alpha = \int_\Delta \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy\,.$$

En intégrant en coordonnées polaires, déterminer pour quelles valeurs de α on a $I_\alpha < \infty$.

Exercice 2. Soit $a, b > 0$ et α, β vérifiant $0 \leq \alpha < \beta$. On pose

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\, y > 0\,,\, \frac{1}{4} < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\,,\, \alpha < \frac{y}{x} < \beta \right\}.$$

(1) Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$ est bornée sur A, et en déduire qu'elle est intégrable sur A.

(2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_A \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2}\, dxdy$$

en posant $(x,y) = (a\, r\cos\theta, b\, r\sin\theta)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive. En utilisant le changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} f(x-y)e^{-(x+y)}dxdy = \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|}dv\,.$$

Exercice 4. On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-x^2y^2}$.

(1) Soit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\,,\, v > 0\,,\, u + v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right).$$

On *admet* que Φ est une bijection de Ω sur le carré $\Omega' =]0,1[\times]0,1[$. Montrer que Φ est un difféomorphisme.

(2) Calculer I.

Exercice 5. On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy} \cdot$

(1) En utilisant le changement de variables $(u,v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a
$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\int_C \frac{dudv}{1-u^2+v^2},$$
où C est le carré de sommets $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ et $(1/2,1/2)$.

(2) On pose $C_+ = \{(u,v)\in C;\ v\geq 0\}$ et $I = \int_{C_+} \frac{dudv}{1-u^2+v^2} \cdot$

(a) Montrer qu'on a
$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

(b) Calculer les deux intégrales précédentes en posant $u = \sin t$ dans la première et $u = \cos(2t)$ dans la deuxième.

(3) Calculer J.

Exercice 6. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polynôme à coefficients complexes.

(1) Soit $r \geq 0$. Montrer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a
$$|P(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} + \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^N a_k \overline{a_l}\, r^{k+l} e^{i(k-l)\theta}.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $r\geq 0$, on a
$$\int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n}.$$

(3) On note $\mathbb{D}$ le disque $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$. En intégrant en coordonnées polaires, montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{D}} |P(x+iy)|^2\, dxdy = \pi \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|^2}{n+1} \cdot$$

Exercice 7. Pour $a,b,c>0$, on pose
$$\mathcal{E}(a,b,c) = \left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\leq 1\right\}.$$

(1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1,1,1)$?

(2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a,b,c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 8. Dans cet exercice, on note B la boule $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

(1) En utilisant les coordonnées sphériques, calculer l'intégrale
$$I = \int_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz\,.$$

(2) En utilisant la formule de changement de variable, montrer que pour toute fonction positive f définie sur B, on a
$$\int_B f(x,y,z)\, dxdydz = \int_B f(y,z,x)\, dxdydz = \int_B f(z,x,y)\, dxdydz\,.$$

(3) Déduire de (2) qu'on a
$$\int_B x^2\, dxdydz = \int_B y^2\, dxdydz = \int_B z^2\, dxdydz = \frac{1}{3}\, I.$$

(4) Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale
$$I(a,b,c) = \int_B (ax^2 + by^2 + cz^2)\, dxdydz\,.$$

Exercice 9. On note $\|\ \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$: si $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors
$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}\,.$$
Dans la suite, on pose
$$C = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \geq 1\}\,.$$

(1) Soit $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, on a
   $$\frac{1}{\|x\|^\alpha} = \alpha \int_{\|x\|}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\,.$$
   (b) Pour $t \geq 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq t\}$ et
   $$V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t)) = \int_{\mathbb{B}(t)} dx_1 \dots dx_d\,.$$
   Déduire de (a) qu'on a
   $$\int_C \frac{dx_1 \dots dx_d}{\|x\|^\alpha} = \alpha \int_1^\infty \frac{V(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt\,.$$

(2) En utilisant le changement de variable $(y_1, \dots, y_d) = \left(\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_d}{t}\right)$, montrer qu'on a $V(t) = t^d V(1)$ pour tout $t > 0$.

(3) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur C.

Exercice 10. Soient $R, h > 0$. On note $\mathcal{C}(R,h) \subset \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

(1) Dessiner $\mathcal{C}(R,h)$.
(2) Montrer qu'en coordonnées cylindriques, un point $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ appartient à $\mathcal{C}(R,h)$ si et seulement si
$$0\leq z\leq h \quad \text{et} \quad r\leq R\left(1-\frac{z}{h}\right).$$
(3) Calculer le volume du cône $\mathcal{C}(R,h)$.
(4) On note G le centre de gravité de $\mathcal{C}(R,h)$.
  (a) Pourquoi le point G est-il situé sur l'axe Oz?
  (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 11. Soit $R>0$. On pose
$$\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \text{et}\, x^2+y^2\leq R^2\}\,.$$
(1) Dessiner $\mathcal{A}$.
(2) On note G le centre de gravité de $\mathcal{A}$, et (x_G, y_G) ses coordonnées.
  (a) Expliquer sans calcul pourquoi on a $x_G=y_G$.
  (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 12. Dans tout l'exercice, on fixe $R>0$ et $\phi_0\in[0,\pi/2[$.
(1) Soit $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ le domaine défini par
$$\mathcal{D}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2;\ y^2+z^2\leq R^2\,,\ 0\leq y\leq z\tan(\phi_0)\}\,.$$
  (a) Dessiner $\mathcal{D}$, et donner la description de $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.
  (b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de son centre de gravité.
(2) Soit maintenant $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^3$ le domaine donné en coordonnées sphériques ($x=r\sin\phi\cos\theta\,,\ y=r\sin\phi\sin\theta\,,\ z=r\cos\phi$) par
$$\begin{cases} 0\leq r\leq R\\ 0\leq\phi\leq\phi_0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$$
  (a) Calculer le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant les coordonnées sphériques.
  (b) Dessiner $\mathcal{B}$, et retrouver le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant le théorème de Guldin.

Exercice 13. Pour $s>0$, on pose
$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\,;$$
(1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $s>0$, on a
$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\,.$$

(2) Calculer $\Gamma(1)$.
(3) Montrer que $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.
(4) Calculer $\Gamma(2)$, $\Gamma(3/2)$ et $\Gamma(5/2)$.

Exercice 14. Soit Γ la fonction introduite à l'exercice 13 :

$$\forall s > 0 \ : \ \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx\,.$$

(1) Soit $s \in]0,1[$, et soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,v) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ est un difféomorphisme de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$.
   (b) En posant $(x,y) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$, montrer qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)}\,\frac{dxdy}{x} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(3) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (2).

Exercice 15. Pour $s > 0$, on pose comme d'habitude

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\,;$$

et pour $a, b > 0$, on pose

$$I(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,t) = (ut, (1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$.
   (b) En posant $(x,y) = (ut,(1-u)t)$, montrer que pour $a, b > 0$ et pour toute fonction positive $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dxdy = I(a,b)\int_0^\infty t^{a+b-1}f(t)\,dt.$$

   (c) En déduire l'identité

$$I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

(2) En posant $u = \cos^2\theta$, montrer qu'on a
$$I(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta\,.$$
En déduire la valeur de $I(1/2,1/2)$. Calculer ensuite $\Gamma(1)$, puis utiliser (2) pour trouver $\Gamma(1/2)$.

Exercice 16. Dans tout l'exercice, d est un entier strictement positif. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$,
$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}\,,$$
et $\mathbb{B}_d$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$,
$$\mathbb{B}_d = \{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq 1\}\,.$$
En fin, on note V_d le volume d-dimensionnel de $\mathbb{B}_d$:
$$V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d) = \int_{\mathbb{B}_d} dx_1\cdots dx_d\,.$$
Le but de l'exercice est d'établir la formule
$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\,,$$
où Γ est la fonction définie dans l'exercice 13.

(1) Vérifier que la formule est correcte pour $d = 1, 2, 3$.

(2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t}dt$.

(3) Pour tout $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|^2 \leq t\}$ et
$$V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t)) = \int_{\mathbb{B}(t)} dx_1\cdots dx_d\,.$$

(a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dx_1\cdots dx_d = \int_0^\infty e^{-t}\,V(t)\,dt.$$

(b) En utilisant le changement de variables $(y_1,\ldots,y_d) = \left(\frac{x_1}{t},\ldots,\frac{x_d}{t}\right)$, montrer qu'on a $V(t) = t^{d/2}V_d$ pour tout $t > 0$.

(c) En déduire la formule
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dx_1\cdots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)V_d\,.$$

(4) Démontrer la formule souhaitée.