Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. Calculer l'intégrale $I = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}\cdot$

Exercice 2. Calculer $I = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$.

Exercice 3. Calculer $I = \int_A \frac{dxdy}{x^2y}$, où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$.

Exercice 4. Soit $a > 0$, et soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq a \text{ et } x+y \leq a\}$. Calculer l'intégrale $I = \int_A e^{2x+y} dxdy$.

Exercice 5. Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$. Calculer $I = \int_A x^3yz^2\, dxdydz$.

Exercice 6. Soit $\Omega =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{e^{-y}\sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

(1) En utilisant l'inégalité $|\sin(xy)| \leq 1$ pour $x \geq 1$ et l'inégalité $|\sin(xy)| \leq xy$ pour $x \in]0,1[$, montrer que f est intégrable sur Ω.
(2) Pour $x > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty e^{-y}e^{ixy}dy$, et en déduire la valeur de $\int_0^\infty f(x,y)\, dy$.
(3) Calculer $\int_\Omega f(x,y)\, dxdy$.

Exercice 7. Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^2$. Pour $r > 0$, on note $D_r \subset \mathbb{R}^2$ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon r, et on pose

$$g(r) = \frac{1}{r^2}\int_{D_r} f(x,y)\, dxdy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(r)\, dr = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.
(1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in I \times I$.
(2) En déduire, en considérant $\int_{I\times I}(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\, dxdy$, qu'on a $\int_I fg \geq \left(\int_I f\right) \times \left(\int_I g\right)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $G_f \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'on a $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 10. Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^d$, et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x))\,dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\,\lambda_d(\{x;\ f(x) > t\})\,dt$$

Exercice 11. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$.
  (a) Calculer $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y)\,dy\right) dx$.
  (b) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y)\,dx\right) dy = I^2$.

(2) Calculer I.

Exercice 12. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1}\,dx\,.$$

(1) Effectuer le changement de variable $x = 1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$, et en déduire qu'on a

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\,du\,.$$

(2) Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$.

(3) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \pi$.

(4) Soit $x \in]0, 1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1 + y)(1 + x^2y)} = 2\,\frac{\log x}{x^2 - 1}\,.$$

(5) En utilisant convenablement le théorème de Fubini, déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale I.

Exercice 13. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D}$ le domaine $]0,1[\times]0,1[\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^3$, et soit $g = \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par
$$g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}\,.$$
Montrer à l'aide du théorème de Fubini qu'on a
$$I = \int_{\mathcal{D}} g(x,y,t)\,dxdydt\,.$$

(2) Vérifier que pour $(x,y,t) \in \mathcal{D}$ tel que $x \neq y$, on a
$$g(x,y,t) = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right).$$

(3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a
$$\int_{\mathcal{D}} g(x,y,t)\,dxdydt = \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}\,.$$

(4) Calculer I.

Exercice 14. Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu}du\right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\,dt$.

Exercice 15. En calculant $J = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,dxdy$ de deux façons différentes, déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 16. On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x}\,dx.$

(1) En utilisant l'inégalité $|\sin x| \leq x$, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}e^{-x}$ est intégrable sur $]0,\infty[$, de sorte que I est bien définie.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$.
  (a) Montrer que f est intégrable sur $A =]0,\infty[\times]1,\infty[$.
  (b) Pour $y \in [1,\infty[$ fixé, calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xy}e^{ix}dx$, et en déduire la valeur de $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$.
  (c) Calculer l'intégrale $\int_1^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right) dx\,.$

(3) Calculer I

Exercice 17. On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$

(1) Soit $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x,y) = y\,\sin^2 x\,e^{-xy}$.

(a) Pour $y > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ en écrivant $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.
(b) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dx\right) dy$.

(2) Déterminer la valeur de I.

Exercice 18. Le but de l'exercice est de montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ a un sens, et de calculer cette intégrale.

(1) Soit $f :]0,\infty[\times]0,\infty[$ définie par $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$.
(a) Montrer que f est intégrable sur $]0,A[\times]0,\infty[$ pour tout $A > 0$, et qu'on a

$$\int_{]0,A[\times]0,\infty[} f(x,y)\,dxdy = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

(b) Montrer que pour $A > 0$ et $y > 0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x,y)\,dx = \frac{1}{1+y^2} - \cos A\,e^{-yA} - \sin A\,ye^{-yA}\,.$$

(2) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \frac{e^{-yA}}{1+y^2}\,dy \leq \frac{1}{A}$ et $\int_0^\infty \frac{ye^{-yA}}{1+y^2}\,dy \leq \frac{1}{A}$ pour tout $A > 0$.

(3) Déduire des questions précédentes que $I = \lim_{A\to\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe, et calculer I.