Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en utilisant uniquement la définition de l'intégrale.

Exercice 2. Calculer les intégrales $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}$, $I_2 = \int_3^4 \frac{4x^2+3}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$ et $I_3 = \int_0^2 \frac{x^2+6x+6}{x^3-x^2-5x-3}\,dx$.

Exercice 3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ ·

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, et soit $\lambda = a + ib$.

(1) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-\lambda}$ ·

(2) En déduire qu'on a $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x-\lambda} = i\pi$ si $b > 0$, et $-i\pi$ si $b < 0$.

Exercice 5. Déterminer les primitives de $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{3x}$.

Exercice 6. Déterminer les primitives de $f(x) = (3x^2 - x + 2)\sin(4x)$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$.

(1) Montrer qu'on a $I_{n+2} = I_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x\,(\sin x)^n]\,\cos x\,dx$.

(2) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la relation de récurrence

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,I_n\,.$$

(3) Calculer I_8 et I_9.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\,dt$.

Exercice 9. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, identiquement nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt\,.$$

(1) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\,\widehat{f}(\lambda)$.
(2) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k \widehat{f}(\lambda) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $F_n(x) = \int f_n(x)\,dx$.
(1) Calculer $F_1(x)$.
(2) En primitivant $f_n(x)$ par parties, établir la relation

$$2nF_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x)\,.$$

(3) En déduire $F_2(x)$.
(4) Retrouver le résultat de (3) à l'aide du changement de variable $x = \tan u$.

Exercice 12. En se ramenant à l'exercice 11, déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ et $g(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$.

Exercice 13. Soit $\beta > 0$. Calculer l'intégrale $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$ en posant $u = x^{-\beta}$.

Exercice 14. Déterminer pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x\,(\ln x)^\beta}$ est intégrable sur $[2, \infty[$.

Exercice 15. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}\cdot$ Montrer que si $2\beta - \alpha = 2$, alors $\int_{]0,1]} f = \int_{[1,\infty[} f$.

Exercice 16. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}$ en utilisant le changement de variable $x = \sin t$.

Exercice 17. Déterminer les primitives de $f(x) = \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 18. Déterminer les primitives de $f_k(x) = (\cos x)^k$ pour $k = 2, 3, 4$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) = (\sin x)^n \cos x$ et $g(x) = (\cos x)^n (\sin x)^3$.

Exercice 20. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,dt$ en posant $u = \cos t$, et $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2+\sin t}\,dt$ en posant $u = \tan(t/2)$.

Exercice 21. Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ en posant $u = \tan(x/2)$.

Exercice 22. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t^{1/4})e^{-t^{1/4}}$.

(1) Montrer que f est intégrable sur $[0,\infty[$. Dans la suite, on pose $I = \int_0^\infty f(t)\,dt$.
(2) Montrer que I est la partie imaginaire de $J = 4\int_0^\infty u^3 e^{-\lambda u}du$, où $\lambda = 1-i$.
(3) Calculer I.

Exercice 23. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$.

(1) Montrer qu'on a aussi $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt$.
(2) En déduire que $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,dt$.
(3) Montrer qu'on a $\int_0^\pi \ln(\sin u)\,du = 2I$.
(4) calculer I.

Exercice 24. Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \int_0^1 \frac{dy}{(y^4+t^4)^{1/4}} + \ln t$.

(1) Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u^4)^{1/4}}\cdot$ Montrer qu'on a $f(t) = g(1/t)$.
(2) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0,\infty[$.

Exercice 25. Soit $f : [1,\infty[\to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{e^{it}}{t}\cdot$

(1) Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.
(2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que si $A \leq X < X'$, alors
$$\left| \int_X^{X'} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{X} + \frac{1}{X'} + \int_X^{X'} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{3}{A}\cdot$$
(3) Montrer que $\int_1^X f(t)\,dt$ admet une limite quand $X \to \infty$.

Exercice 26. (formule de Taylor)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si $a, b \in I$, alors
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n\,,$$
où le "reste" R_n est donné par la formule
$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Exercice 27. En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\cdot$$

Exercice 28. (inégalité de Cauchy-Schwarz)

(1) Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

(2) Soient f et g deux fonctions positives sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$.

(a) En utilisant (1) avec $a = \sqrt{t}\, f(x)$ et $b = \frac{g(x)}{\sqrt{t}}$, montrer que pour tout $t > 0$, on a $\int_I fg \leq \frac{t}{2} \int_I f^2 + \frac{1}{2t} \int_I g$.

(b) En déduire (en choisissant convenablement t) qu'on a

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^2\right)^{1/2} \left(\int_I g^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 29. (théorème des résidus)

Dans tout l'exercice, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, où les polynômes P et Q sont à coefficients réels. On suppose que Q n'a pas de racines réelles, et que $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$. On suppose également que toutes les racines complexes de Q sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est égal à 1.

(1) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les racines complexes de P à partie imaginaire strictement positive.

(a) Montrer qu'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{x - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\overline{c_j}}{x - \overline{\lambda_j}},$$

où les c_j sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients c_j sont donnés par $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$ ·

(c) Montrer également qu'on a $\sum_{j=1}^{N} c_j + \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} = 0$.

(3) Avec les notations de (2), montrer à l'aide de l'exercice 4 qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} c_j .$$

(4) *Application numérique :* Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ ·