Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

Examen du 16 Mai 2011

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Soit B la boule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<1\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour $\alpha > 0$, calculer l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_B (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz$$

en intégrant en coordonnées sphériques.

(2) Soient $R > 0$ et $\alpha, \beta \in]0, \pi/2[$. On note $\mathcal{D}(R,\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^2$ le domaine donné en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ par

$$0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad -\beta \leq \theta \leq \alpha\,.$$

Dessiner $\mathcal{D}(R,\alpha,\beta)$, puis déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

(3) Soit Γ la partie de la courbe d'équation $y = x^3$ joignant le point $(-1,-1)$ au point $(1,1)$. Dessiner Γ et calculer l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma x^4ydx + x^2y^2dy$.

(4) Énoncer la formule de Green-Riemann, et démontrer cette formule dans le cas d'un rectangle.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, d est un entier strictement positif. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$: si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}\,.$$

Pour $r > 0$, on note $B_d(r)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^d$:

$$B_d(r) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| < r\}\,,$$

et on note $V_d(r)$ le volume d-dimensionnel de $B_d(r)$,

$$V_d(r) = \int_{B_d(r)} dx_1 \ldots dx_d\,.$$

(1) Soit $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\varphi(\|x\|) = -\int_{\|x\|}^\infty \varphi'(r)\,dr$.

(b) En déduire (à l'aide du théorème de Fubini) l'identité
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\, dx_1 \dots dx_d = -\int_0^\infty \varphi'(r) V_d(r)\, dr\,.$$

(2) Soit $r > 0$. Calculer le déterminant Jacobien de l'application $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $\Phi(u_1, \dots, u_d) = (ru_1, \dots, ru_d)$, puis montrer qu'on a
$$V_d(r) = r^d V_d(1)\,.$$

(3) Soit à nouveau $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini. En utilisant (1), (2) et une intégration par parties, montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\, dx_1 \dots dx_d = d\, V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r)\, dr\,.$$

(4) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, Γ est une courbe fermée régulière dans $\mathbb{R}^2$ entourant un domaine Ω.

(1) On oriente Γ dans le sens positif. Montrer que l'aire de Ω est donnée par la formule
$$aire(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\Gamma x dy - y dx\,.$$

(2) On suppose que Γ admet un paramétrage $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ de la forme
$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\,,$$
où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'on a
$$aire(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta\,.$$

(3) Soit $a > 0$. On suppose que Γ est définie par l'équation polaire
$$r = a(1 + \cos\theta),$$
où θ varie entre 0 et 2π.

(a) Calculer l'aire de Ω.

(b) *Question hors-barème.* Dessiner Γ.