Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

DS du 10 Mars 2011

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+1)}\, dx.$

(2) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = (x+2)\, e^{3x}$.

(3) Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\, dx$ en posant $x = \sqrt{\sin t}$ et en utilisant l'identité $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$

(1) Soit $y > 0$ fixé.

(a) En remarquant que $|e^{2ix}| = 1$, montrer que la fonction $x \mapsto e^{(2i-y)x}$ est intégrable sur $]0,\infty[$. Montrer ensuite que $e^{(2i-y)X}$ tend vers 0 quand $X \to +\infty$, puis calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{(2i-y)x}\, dx$.

(b) Déduire de (a) qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(2x)\, e^{-xy}\, dx = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{y-2i}\right) = \frac{y}{y^2+4}\,.$$

(c) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, déduire de (b) qu'on a

$$\int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-xy}\, dx = \frac{2}{y(y^2+4)}\,.$$

(2) Soit $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x,y) = y\,\sin^2 x\, e^{-xy}$. En utilisant (1c), calculer l'intégrale double

$$J = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dx\right) dy\,.$$

(3) Calculer I en utilisant (2) et le théorème de Fubini.

Exercice 2. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, e^t \, dt\,,$$

où $n! = 1 \times \cdots \times n$ si $n \geq 1$; et par convention, $0! = 1$ et $(x-t)^0 = 1$.

(1) Montrer qu'on a $e^x = 1 + R_0(x)$.

(2) En intégrant par parties, établir la relation

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x)\,.$$

(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)\,.$$

(4) Établir l'inégalité

$$|R_n(x)| \leq e^x \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

(5) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$