MAT3

Corrigé succinct de l'examen

Questions de cours.

(1) En coordonnées sphériques, on a $(x,y,z) = (r\sin\varphi\phi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$, $dxdydz = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$ et $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Donc

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(r^2)^\alpha r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 r^{2\alpha+2}\left(\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\right)dr \\ &= 4\pi\int_0^1 r^{2\alpha+2}\, dr \\ &= \frac{4\pi}{2\alpha+3}\cdot \end{aligned}$$

(2) Faire soigneusement le dessin. En coordonnées polaires, on a $dxdy = rdrd\theta$, donc l'aire de $\mathcal{D}(R,\alpha,\beta)$ est égale à

$$\int_0^1\int_{-\beta}^\alpha rdrd\theta = (\alpha+\beta)\int_0^R r\, dr = (\alpha+\beta)\,\frac{R^2}{2}\cdot$$

En notant G le centre de gravité de $\mathcal{D}(R,\alpha,\beta)$, on a donc

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{(\alpha+\beta)R^2}\int_{\mathcal{D}(R,\alpha,\beta)} x\, dxdy \\ &= \frac{2}{(\alpha+\beta)R^2}\int_{-\beta}^\alpha\int_0^R r\cos\theta\times rdrd\theta \\ &= \frac{2}{(\alpha+\beta)R^2}\times\frac{R^3}{3}(\sin\alpha+\sin\beta) \\ &= \frac{2R}{3}\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\alpha+\beta}\cdot \end{aligned}$$

De même, on trouve (après calcul)

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{2}{(\alpha+\beta)R^2}\int_{\mathcal{D}(R,\alpha,\beta)} y\,dxdy \\ &= \frac{2R}{3}\times\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\alpha+\beta}\,. \end{aligned}$$

(3) Faire le dessin. La courbe se paramètre par $\gamma(t)=(t,t^3)$, $t\in[-1,1]$. On a donc $x=t$, $dx=dt$ et $y=t^3$, $dy=3t^2dt$, d'où

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} t^4\times t^3\times dt+\int_{-1}^{1} t^2\times(t^3)^2\times 3t^2dt \\ &= \int_{-1}^{1}(t^7+3t^{10})\,dt \\ &= \frac{6}{11}\,. \end{aligned}$$

(4) Voir le cours.

Exercice 1. (1) (a) On a $\int_{\|x\|}^{\infty}\varphi'(r)\,dr = [\varphi(r)]_{\|x\|}^{\infty} = -\varphi(\|x\|)$ car $\varphi(r)$ tend vers 0 quand $r\to\infty$.

(b) D'après (a) et Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\|x\|)\,dx_1\ldots dx_d &= -\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\|x\|}^{\infty}\varphi'(r)\,dr\right)dx_1\cdots dx_d \\ &= -\int_0^{\infty}\varphi'(r)\left(\int_{\{x;\,\|x\|\le r\}} dx_1\cdots dx_d\right)dr \\ &= -\int_0^{\infty}\varphi'(r)\left(\int_{B_d(r)} dx_1\cdots dx_d\right)dr \\ &= -\int_0^{\infty}\varphi'(r)V_d(r)\,dr\,. \end{aligned}$$

(2) La matrice Jacobienne de Φ en tout point est diagonale avec des r sur la diagonale, donc $J_\Phi(u_1,\ldots,u_d)=r^d$. Comme Φ est un difféomorphisme qui transforme $B_d(1)$ en $B_d(r)$, on en déduit

$$V_d(r)=\int_{\Phi(B_1(r))} dx_1\cdots dx_d=\int_{B_1(r)} r^d\,du_1\cdots du_d=r^dV_d(1)$$

d'après la formule de changement de variables.

(3) D'après (1) et (2), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\|x\|)\,dx_1\ldots dx_d=-V_d(1)\int_0^{\infty} r^d\varphi'(r)\,dr\,.$$

D'autre part, en intégrant par parties et *en supposant que* $r^d\varphi(r)$ *tend vers* 0 *quand* $r \to \infty$, on trouve

$$\int_0^\infty r^d\varphi'(r)\,dr = \left[r^d\varphi(r)\right]_0^r - \int_0^\infty dr^{d-1}\varphi(r)\,dr = -d\int_0^\infty r^{d-1}\varphi(r)\,dr\,,$$

d'où le résultat.

(4) Il s'agit de voir quand l'intégrale $I(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx_1\cdots dx_d}{1+\|x\|^\alpha}$ est finie. En appliquant (3) avec $\varphi(r) = \frac{1}{1+r^\alpha}$, on obtient

$$I(\alpha) = dV_d(1)\int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{1+r^\alpha}\,dr\,.$$

Le terme dans l'intégrale de droite se comporte comme $\frac{1}{r^{\alpha-(d-1)}}$ quand $r \to \infty$. D'après le cours, l'intégrale est donc finie si et seulement $\alpha - (d-1) > 1$, autrement dit $\alpha > d$.

Exercice 2. (1) C'est une conséquence de la formule de Green-Riemann. La démonstration a été faite en cours.

(2) On calcule l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xdy - ydx$ en posant $x = r(\theta)\cos\theta$, $dx = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)d\theta$ et $y = r(\theta)\sin\theta$, $dy = (r'(\theta) + r(\theta)\cos\theta)\,d\theta$. On a alors

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= \Big[r(\theta)\cos\theta\,(r'(\theta) + r(\theta)\cos\theta) - r(\theta)\sin\theta\,(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)\Big]\,d\theta \\ &= r(\theta)^2\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta \\ &= r(\theta)^2\,d\theta. \end{aligned}$$

D'après (1), on en déduit la formule souhaitée.

(3) (a) On applique (2) avec $r(\theta) = a(1+\cos\theta)$ et $[\alpha,\beta] = [0,2\pi]$, ce qui donne

$$aire(\Omega) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Ensuite, on utilise l'identité $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et on calcule l'intégrale. On trouve au final $aire(\Omega) = 2\pi a^2$.

(b) C'était hors-barême.