Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. (théorème de Rolle dans $\mathbb{R}^n$)
Soit Ω une ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et différentiable dans Ω. On suppose que f est constante sur $\partial\Omega$. Montrer qu'il existe un point $c \in \Omega$ tel que $Df(c) = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f n'est pas minorée, mais admet un minimum local. Montrer que f' s'annule au moins deux fois.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \Omega;\ f(x) \leq M\}$ est compact. Montrer que f possède un minimum.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0, y > 0, z > 0\}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + z + \frac{a}{xyz}$, où $a > 0$ est fixé. Montrer que f possède un minimum et déterminer ce minimum.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$. Déterminer $\inf \left\{xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y};\ x > 0, y > 0\right\}$.

Exercice 6. Soit E un evn de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe un point $c \in E$ tel que $Df(c) = 0$.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien, et soient $a_1, \ldots, a_n \in E$. Soient également $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs non tous nuls. Montrer qu'il existe un unique point $x \in E$ minimisant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \|x - a_i\|^2$ et déterminer ce point.

Exercice 8. (point de Fermat)
Dans tout l'exercice, ABC est un triangle dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dont tous les angles sont de mesure $< 2\pi/3$. Si M est un point du plan, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC\,.$$

(1) Montrer que la fonction f atteint sa borne inférieure.
(2) On note 2α la mesure de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ABC.

(a) Si M est un point de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$, exprimer MB en fonction de AB et AM. De même, exprimer MC en fonction de AC et AM.

(b) Pour $\varepsilon \geq 0$, on note M_ε le point de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ tel que $M_\varepsilon A = \varepsilon$. Déduire de (a) que les fonctions $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon B$ et $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon C$ sont dérivables en 0^+ et déterminer leurs dérivées en 0.

(c) Conclure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$f(M_\varepsilon) = AB + AC - c\,\varepsilon + o(\varepsilon)$$

au voisinage de 0.

(3) Montrer que les points A, B et C ne minimisent pas la fonction f.

(4) Montrer que f est différentiable sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$, et pour $M \in \Omega$, exprimer $\nabla f(M)$ à l'aide des longueurs MA, MB, MC et des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

(5) Montrer qu'il existe un unique point M minimisant $MA+MB+MC$, et que ce point est caractérisé par la propriété suivante : les 3 angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMA}$ ont pour mesure $2\pi/3$.

Exercice 9. (calcul des variations)
Dans tout l'exercice, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ muni de la norme $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. On définit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(u) = \int_0^1 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t))\, dt \ .$$

Montrer que Φ est différentiable sur E et qu sa différentielle est donnée par

$$D\Phi(u)h = \int_0^1 \Big[\partial_2\mathcal{L}(t, u(t), u'(t))h(t) + \partial_3\mathcal{L}(t, u(t), u'(t))h'(t)\Big]\, dt\,.$$

(2) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ fixés. On pose $\mathcal{E}_{pq} = \{u \in E;\ u(0) = p\,, u(1) = q\}$ et $E_0 = \{h \in E;\ h(0) = 0 = h(1)\}$. Montrer que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{pq}$, alors $D\Phi(u)h = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$.

(3) On garde les notations de (2).

(a) Montrer que si $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $\int_0^1 c(t)h'(t)\, dt = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$, alors c est nécessairement constante.

(b) En déduire que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{pq}$, alors u doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\Big[\partial_3\mathcal{L}\left(t, u(t), u'(t)\right)\Big] = \partial_2\mathcal{L}\left(t, f(t), f'(t)\right).$$

(4) Dans cette question, on prend $\mathcal{L}(t,u,v) = \sqrt{1+v^2}$.
   (a) Montrer que la fonction Φ est convexe.
   (b) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{E}_{p,q}$ minimisant Φ, et déterminer cette fonction.
   (c) Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice 10. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^3$
(b) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
(c) $f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{1-x^2}$
(d) $f(x,y) = x^2 + y^4$
(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$
(f) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3 - x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 7x - 8y - 6z$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

(1) Déterminer les extrema locaux de f.
(2) On note Δ le triangle plein (fermé) délimité par les droites d'équation $y = -1$, $y = 2 + x$ et $y = 2 - x$.
   (a) Pourquoi f possède-t-elle un maximum et un minimum sur Δ?
   (b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2-y^2}$

(1) Montrer que f atteint son minimum en $(0,0)$ et ne possède pas d'autre extremum local.
(2) Montrer que f possède un maximum sur le carré $C = [0,2] \times [0,2]$, et déterminer ce maximum.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$. Montrer que f n'est pas minorée, qu'elle admet un minimum local, et que Df ne s'annule qu'une fois. Comparer avec l'exercice 2.

Exercice 15. (principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω. On suppose qu'on a $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $f(x) \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi)$ pour tout $x \in \Omega$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x) + 2^{-n}\|x\|^2$.
   (a) Montrer qu'on a $\Delta f_n(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$
   (b) En déduire que f_n n'admet pas de maximum local dans Ω.
   (c) Montrer qu'il existe un point $\xi_n \in \partial\Omega$ tel que $\forall x \in \Omega \,:\, f_n(x) \leq f_n(\xi_n)$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si f est convexe, alors $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est une fonction affine si et seulement si f est convexe et $\Delta f = 0$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$. Montrer que f est convexe.

Exercice 19. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle - \langle a, x \rangle .$$

(1) Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si la matrice M est positive.
(2) On suppose que M est définie positive. Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point, et déterminer ce point

Exercice 20. Soit $p > 0$. Parmi tous les rectangles de périmètre p, quel est celui dont l'aire est maximale?

Exercice 21. On veut construire une boite en carton parallèlépipèdique sans couvercle de volume 3 litres, en utilisant le moins de carton possible. Quelles doivent être les dimensions de la boite? (*L'exercice 5 peut être utile*).

Exercice 22. On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$; et pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on note $d(a, \mathcal{H})$ la distance de a à $\mathcal{H}$.

(1) Soit $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \|(x, 1/x) - a\|^2$, et en déduire que si $u = (x, y) \in \mathcal{H}$ vérifie $\|u - a\| = d(a, \mathcal{H})$, alors

$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x - 1 = 0 .$$

(2) Déterminer la distance du point $a = (2, 2)$ à l'hyperbole $\mathcal{H}$.