Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^2+5y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \|x\|^2 \log(\|x\|^2)$ si $x \neq 0$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles en tout point.
(2) Déterminer si f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en 0.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles en tout point.
(2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 4. Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que a, b et toutes leurs dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a(nx) b(ny)$.

Exercice 5. Le **laplacien** d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est la fonction

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\,.$$

(1) Calculer Δf lorsque $f(x) = \|x\|^2$.
(2) Calculer Δf lorsque $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

Exercice 6. (laplacien en coordonnées polaires)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Exprimer Δf en coordonnées polaires; autrement dit, exprimer Δf à l'aide des dérivées partielles de la fonction $\widetilde{f} :]0,\infty[\times \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,$.

Exercice 7. (laplacien d'une composée)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\forall x \in \Omega \ : \ \Delta(\varphi \circ u)(x) = \varphi''(u(x))\|\nabla u(x)\|^2 + \varphi'(u(x))\Delta u(x)\,.$$

Exercice 8. (laplacien d'une fonction radiale)
Soit $\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, puis montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\,\varphi(r)\,.$$

Exercice 9. (laplacien et matrices orthogonales)
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note f_M la fonction définie par $f_M(x) = f(Mx)$.

(1) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \Delta f_M(x) = \sum_{i,k=1}^{n} \langle L_i, L_k \rangle \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(Mx)\,,$$

où $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de la matrice M et $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Que devient cette formule lorsque M est une matrice orthogonale?

Exercice 10. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

(1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $g = \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(u,uv)$.
   (a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide de g.
   (b) Pour $(u,v) \in \Omega$, exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ à l'aide des dérivées partielles de f et de $(x,y) = (u,uv)$.

(2) Déterminer les solutions de (E).

Exercice 11. (équation des ondes)
Soit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

On *rappelle* (cf Feuille 1) que les solutions $\mathcal{C}^1$ d'une équation du type $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont de la forme $f(x,y) = \varphi(-bx + ay)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit f une solution de (E). Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = \frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y}$ soit de la forme $g(x,y) = \varphi(y + cx)$.

(2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \varphi(y+cx)$.
   (a) On pose $f_0(x,y) = \frac{1}{2c}\int_0^{y+cx} \varphi(s)\, ds$. Calculer $\frac{\partial f_0}{\partial x} + c\frac{\partial f_0}{\partial y}$.
   (b) Déterminer toutes les solutions $\mathcal{C}^1$ de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} = g$.

(3) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme $f(x,y) = u(y-cx) + v(y+cx)$, où u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. (équation de la chaleur)
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_n$ est absolument convergente. Soit également $\Omega =]0,\infty[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Justifier la définition, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Exercice 13. (fonctions harmoniques radiales)
On dit qu'une fonction f (à valeurs réelles) de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta f = 0$. En utilisant l'exercice 8, trouver toutes les fonctions f harmoniques sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et **radiales**, i.e. telles que $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

Exercice 14. (champs gradients; lemme de Poincaré)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Un **champ de vecteurs** sur Ω est une application $V : \Omega \to \mathbb{R}^2$, qu'on notera toujours $V(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. On dit qu'un champ de vecteurs V sur Ω est un **champ gradient** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = V$.

(1) Soit $V = (P,Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Quelle relation doit-il exister entre $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ pour que V soit un champ gradient?

(2) On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que si V est un champ gradient sur Ω, alors on a $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = 0$ pour toute fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ et $\gamma(b) = \gamma(a)$.

(3) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $V(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Montrer (que V est de classe $\mathcal{C}^1$ et) qu'on a $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, mais que V n'est pas un champ gradient. (*Poser* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ *et utiliser (2)*).

(4) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^2$. Soit $V = (P,Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ · En considérant la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,s)\,ds\,,$$

montrer que V est un champ gradient.

Exercice 15. Soit F un evn et soit $\varphi : [a,b] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\varphi'(a) = 0 = \varphi'(b)$. On pose $M = \sup_{s\in[a,b]} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Pour $t \in [a,b]$, majorer $\|\varphi(t) - \varphi(a)\|$ et $\|\varphi(t) - \varphi(b)\|$ à l'aide de M.

(2) En déduire qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M\,\frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 16. Soit F un evn, soit $a > 0$ et soit $\varphi : [-a,a] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $M = \sup_{s\in[-a,a]} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Soit $t \in [-a,a]$. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $\varphi(a) - \varphi(t)$ et $\varphi(-a) - \varphi(t)$.

(2) Montrer que pour tout $t \in [-a,a]$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{\|\varphi(a) - \varphi(-a)\|}{2a} + M\,\frac{a^2 + t^2}{2a}\,.$$

Exercice 17. Soit F un evn et soit $\varphi : \mathbb{R} \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que φ et φ'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup_{s\in\mathbb{R}} \|\varphi(s)\|$ et $M_2 = \sup_{s\in\mathbb{R}} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Majorer $\|\varphi(t+h) - \varphi(t) - h\varphi'(t)\|$ à l'aide de M_2 pour tout $h \in \mathbb{R}$, et en déduire que pour tout $h > 0$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{M_2}{2}\,h + \frac{2M_0}{h}\,.$$

(2) Montrer qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x,y)$ par une formule intégrale, puis montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \cos(3x + 2y)$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0,0) = 0$ et $Df(0,0) = 0$. Montrer qu'il existe trois fonctions continues a, b, c sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = x^2 a(x,y) + xy\,b(x,y) + y^2 c(x,y)\,.$$