Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un evn. Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a

$$\|v - u\| \geq \Big| \|v\| - \|u\| \Big|.$$

Exercice 2. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un evn. Montrer que la norme est une fonction *convexe* sur E : si $u, v \in E$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $\|\lambda u + (1-\lambda)v\| \leq \lambda \|u\| + (1-\lambda)\|v\|$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|u\|_\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$.

Exercice 4. Pour $u \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt$. Montrer que la norme $\| \cdot \|_1$ n'est pas équivalente à la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Montrer que f est continue en tout point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$
(2) Est-il possible de modifier la valeur de $f(0,0)$ pour rendre f continue en $(0,0)$?

Exercice 6. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 7. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie l en $\pm\infty$. On définit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = (x+y)f\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $g(x,0) = lx$.

(1) Pourquoi g est-elle continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$?
(2) Montrer que g est continue en tout point $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$.

(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que g est également continue en $(0,0)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(1) Montrer que si $H \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|H\| < 1$, alors la série $\sum H^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.
(2) En déduire que si $\|H\| < 1$ alors $I - H$ est inversible.
(3) Conclure que si $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|M - I\| < 1$, alors M est inversible.

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, .$$

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(1) Soit Θ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ on pose $a_j = \Theta(e_j)$, où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Pour $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, exprimer $\Theta(u)$ à l'aide des a_j.
   (b) Montrer qu'on a $\|\Theta\| = \sum_{j=1}^n |a_j|$.
(2) Démontrer le "lemme de scalarisation" pour l'evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 14. (*preuve du "lemme de scalarisation" en dimension finie*)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie, et soit $a \in E \setminus \{0\}$ fixé. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire (continue) $\Theta \in E^*$ telle que $\|\Theta\| = 1$ et $\Theta(a) = \|u\|$.

(1) Soit $F_1 = \mathbb{R}a$. On définit une forme linéaire $\Phi_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ par $\Phi_1(\lambda a) = \|a\| \, \lambda$. Montrer qu'on a $\|\Phi_1\| = 1$ et $\Phi_1(a) = \|u\|$.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant a, avec $F \neq E$, et soit $e \in E \setminus F$. Soit également $\Phi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant $\|\Phi\| \leq 1$.
   (a) Montrer que pour tous $v, w \in F$, on a

$$\Phi(v) - \|v - e\| \leq \|w + e\| - \Phi(w) \, .$$

(b) En déduire qu'il existe un nombre réel c tel que
$$\forall v, w \in F \;:\; \Phi(v) - \|v - e\| \leq c \leq \|w + e\| - \Phi(w)\,.$$
(c) Montrer que pour tout $u \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\Phi(u) + c\lambda \leq \|u + \lambda e\|\,.$$
(d) Conclure qu'il existe une forme linéaire $\Phi' : F \oplus \mathbb{R}e \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi' \equiv \Phi$ sur F et $\|\Phi'\| \leq 1$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 15. Soit F un espace vectoriel normé.

(1) Soient $a, b \in F$, et soit $u : \mathbb{R} \to F$ définie par $u(h) = \|a + hb\|$.
  (a) Montrer que u est une fonction convexe.
  (b) Montrer à l'aide de (a) que si $0 < h < h'$, alors
$$\frac{u(h) - u(0)}{h} \leq \frac{u(h') - u(0)}{h'} \leq \|b\|\,.$$
  (c) Montrer que u est dérivable à droite en 0, avec $u'_d(0) \leq \|b\|$.

(2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to F$. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \|\varphi(t)\|$.
  (a) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose que la fonction φ est dérivable en t_0. Montrer qu'on peut écrire $f(t_0+h) = \|\varphi(t_0)+h\varphi'(t_0)\|+\alpha(h)$, où $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$.
  (b) Montrer que si φ est dérivable en un point t_0, alors f est dérivable à droite en t_0, avec $f'_d(t_0) \leq \|\varphi'(t_0)\|$.

Exercice 16. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On suppose qu'on a $\|\gamma(t)\|_2 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Soient F un evn et $\varphi : [0, \infty[\to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|\varphi'(t)\| \leq k\,\|\varphi(t)\|$ pour tout $t \geq 0$.

(1) On pose $a = \|\varphi(0)\|$ et $u(t) = \|\varphi(t)\|$. Montrer qu'on a $u(t) \leq a + k\int_0^t u(s)\,ds$ pour tout $t \geq 0$.
(2) On pose maintenant $v(t) = a + k\int_0^t u(s)\,ds$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-kt}v(t)$ est décroissante sur $[0, \infty[$.
(3) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\|\,e^{kt}$.

Exercice 18. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, +\infty[\to F$ une fonction dérivable.

(1) Montrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $t \geq A$, on a
$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(A)\| + (t - A)\sup_{s\geq A}\|\varphi'(s)\|\,.$$
(2) Montrer que si on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi'(t) = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = 0$.

Exercice 19. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, \infty[\to F$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, \infty[$. On suppose que $\varphi'(t)$ admet une limite $l \in F$ quand $t \to 0^+$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, on peut trouver $c_t \in]0, t[$ tel que
$$\|\varphi(t) - \varphi(0) - tl\| \leq t \, \|\varphi'(c_t) - l\|.$$
(2) Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = l$.

Exercice 20. Soient F un espace vectoriel normé, $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $\varphi : [a, b] \to F$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

(1) On suppose que g est strictement croissante, et qu'on a $\|\varphi'(t)\| < g'(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.
   (a) On pose $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$. Pourquoi la fonction réciproque $g^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ est-elle dérivable sur $]\alpha, \beta[$?
   (b) Soit $\psi = \varphi \circ g^{-1} : [\alpha, \beta] \to F$. Montrer qu'on a $\|\psi'(s)\| < 1$ pour tout $s \in]\alpha, \beta[$.
   (c) Déduire de (b) l'inégalité $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| < g(b) - g(a)$.
(2) On suppose seulement que g est croissante et qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq g'(t)$ pour tout $t \in]a, b[$. En considérant les fonctions $g_\varepsilon(t) = g(t) + \varepsilon t$ pour $\varepsilon > 0$, montrer qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a)$.
(3) Redémontrer en 3 lignes le résultat de (2) lorsque φ et g sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 21. Soit $\varphi : [a, b] \to F$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, où F est un evn. On suppose qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq M$ sur $[a, b]$ pour une certaine constante M. Le but de l'exercice de montrer qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M(b - a)$ en utilisant une méthode différente de celle vue en cours pour démontrer l'inégalité des accroissements finis.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On suppose qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \geq K(b - a)$.
   (a) On note m le milieu de $[a, b]$. Montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois $\|\varphi(m) - \varphi(a)\| < K(m - a)$ et $\|\varphi(b) - \varphi(m)\| < K(b - m)$.
   (b) Montrer à l'aide de (a) qu'il existe une suite de segments emboités $I_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$ tels que $\mathrm{diam}(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$ et $\left\| \frac{\varphi(b_n) - \varphi(a_n)}{b_n - a_n} \right\| \geq K$ pour tout $n \geq 1$.
   (c) En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\|\varphi'(c)\| \geq K$.
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 22. On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(1) Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{M^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On pose
$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \, .$$

(2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la dérivée de l'application $p_k : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $p_k(t) = t^k A^k$?
   (b) Montrer que l'application $t \mapsto e^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on a
$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}\,.$$

Exercice 23. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$.
(1) Montrer que A et B commutent avec e^{tA}, e^{tB} et $e^{t(A+B)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(2) En utilisant (1) et l'exercice 22, montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ est constante.
(3) Montrer qu'on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 24. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $\Phi(0) = I$ et $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.
(1) Montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Phi(s)\,ds - I \right\| < 1$.
(2) Pourquoi la matrice $M(\delta) = \int_0^\delta \Phi(s)\,ds$ est-elle inversible? (*Voir l'exercice 11*).
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_t^{t+\delta} \Phi(u)\,du = M(\delta)\Phi(t)$, et en déduire que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(5) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. On suppose que Φ possède une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en tout point $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, et que la fonction $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times [0, 1]$.
(1) Pour $x \in [a, b]$, on note $\Phi(x\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$. Montrer que l'application $x \mapsto \Phi(x, \cdot)$ est dérivable de $[a, b]$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \cdot \|_\infty)$ et a pour dérivée l'application $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \cdot)\,$.
(2) Soit $L : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $L(u) = \int_0^1 u(t)\,dt$. Montrer que L est continue.
(3) On définit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_0^1 \Phi(x, t)\,dt$. Déduire de (1) et (2) que φ est dérivable sur $[a, b]$ et donner une formule pour $\varphi'(x)$.

Exercice 26. Soit $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$. Pour $x \in [0, 1]$, on note $\Phi_x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Phi_x(t) = \Phi(x, t)$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction Φ_x est continue sur $[0, 1]$. On a donc une application $x \mapsto \Phi_x$ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$.
(1) Montrer que si Φ est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, alors l'application $x \mapsto \Phi_x$ est continue de $[a, b]$ dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \| \cdot \|_\infty)$.

(2) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, la forme linéaire $\delta_t : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par $\delta_t(u) = u(t)$ est continue sur $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. En déduire que si l'application $x \mapsto \Phi_x$ est dérivable en un point x_0, alors Φ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en tout point (x_0, t), $t \in [0,1]$.

(3) Dans cette question, on prend pour Φ la fonction définie

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x - t & \text{si} \quad t \leq x \\ 0 & \text{si} \quad t > x \end{cases}$$

Montrer que l'application $x \mapsto \Phi_x$ est continue de $[0,1]$ dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, mais n'est dérivable en aucun point.