Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 2 Mars 2011

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) On identifie $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et on note $\| \cdot \|$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $H \in M_n(\mathbb{R})$ et si $\rho > \|H\|$, alors la série $\sum_{k\geq 0} \rho^{-k} H^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \times E \to F$ définie par $\Phi(L, x) = L(x)$ est différentiable en tout point, et déterminer sa différentielle.

(3) Soit $(F, \| \cdot \|)$ un espace euclidien, et soit $\gamma : \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable. Exprimer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ en fonction de $\gamma(t)$, de $\gamma'(t)$ et du produit scalaire de F.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante M telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) \right| \leq M\,.$$

Montrer que pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|f(h) - f(0)| \leq M \times \max(|h_1|, \dots, |h_n|)\,.$$

(5) Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose qu'il existe deux constantes C et α telles que $|c_n| \leq C\, n^\alpha$ et $|\lambda_n| \leq C\, n^\alpha$ pour tout $n \geq 1$. Soit également $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{-nt} \cos(\lambda_n\, x)\,.$$

Justifier la définition, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

(6) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \operatorname{ch}(y), e^x \operatorname{sh}(y))$. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point.

(7) Soit F un espace vectoriel normé, et soit $\varphi : [0,1] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'on a $\varphi'(0) = 0$ et $\|\varphi''(t)\| \leq t^2$ pour tout $t \in [0,1]$. Établir l'inégalité

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \frac{1}{12} \cdot$$

(8) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x^2y^3) + e^{x \sin y}$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

(9) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + 2y^2 + z^2 + x - 4y - 6z + 11\,.$$

(10) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \log(e^x + e^y)$. Montrer que f est convexe.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et la lettre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on pose

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \cdot$$

(1) Déterminer Δf dans les deux cas suivants :
  (a) $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|^2$.
  (b) $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$.

(2) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = \|x\|$.
  (a) Justifier que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
  (b) Montrer que pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = \frac{\|x\|^2 - x_j^2}{\|x\|^3} \cdot$$

  (c) Exprimer $\Delta u(x)$ en fonction de $\|x\|$.

(3) Montrer que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant $u(\Omega)$, alors

$$\forall x \in \Omega \ : \ \Delta(\varphi \circ u)(x) = \varphi''(u(x))\|\nabla u(x)\|^2 + \varphi'(u(x))\Delta u(x)\,.$$

(4) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, puis montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\,\varphi'(r)\,.$$

(5) On prend toujours $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En utilisant (4), déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(x) \text{ ne dépend que de } \|x\| \\ \Delta f = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Un **champ de vecteurs** sur Ω est une application $V : \Omega \to \mathbb{R}^2$, qu'on notera toujours $V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. On dit qu'un champ de vecteurs $V = (P, Q)$ sur Ω est un **champ gradient** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = V$; autrement dit : $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

(1) Soit $V = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Quelle relation doit-il exister entre $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ pour que V soit un champ gradient?

(2) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$.

  (a) Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, exprimer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ à l'aide de ∇f, de $\gamma(t)$, de $\gamma'(t)$ et du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

  (b) On suppose qu'on a $\gamma(b) = \gamma(a)$. Montrer que si V est un champ gradient sur Ω, alors
$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = 0 \, .$$
  (*On a noté* $\langle\ ,\ \rangle$ *le produit scalaire sur* $\mathbb{R}^2$).

(3) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

  (a) Montrer que V est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'on a $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot$

  (b) En considérant $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, montrer que V n'est pas un champ gradient.

(4) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^2$. Soit $V = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot$ En considérant la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \int_0^x P(t, 0) \, dt + \int_0^y Q(x, s) \, ds \, ,$$
montrer que V est un champ gradient.

Exercice 3. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on note $d(a, \mathcal{H})$ la distance de a à $\mathcal{H}$:
$$d(a, \mathcal{H}) = \inf\{\|u - a\|;\ u \in \mathcal{H}\} \, ,$$
où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, il existe un point $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - a\| = d(a, \mathcal{H})$.

(2) Soit $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

  (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \|(x, 1/x) - a\|^2$.

  (b) En déduire que si $u = (x, y) \in \mathcal{H}$ vérifie $\|u - a\| = d(a, \mathcal{H})$, alors
$$x^4 - \alpha x^3 + \beta x - 1 = 0 \, .$$

(3) Déterminer la distance du point $a = (2, 2)$ à l'hyperbole $\mathcal{H}$.