Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 5 Janvier 2011

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit E un espace vectoriel normé, et soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f_\alpha(x) = |B(x,x)|^\alpha \,.$$
 (a) Montrer que si $\alpha > 1/2$, alors f_α est différentiable en 0 avec $Df_\alpha(0) = 0$.
 (b) On suppose qu'il existe $e \in E$ tel que $B(e,e) \neq 0$. Montrer que $f_{1/2}$ n'est pas dérivable en 0 dans la direction de e.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé, exprimer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(tx)$ à l'aide des dérivées partielles de f.

(3) Soit $\alpha > 0$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\,(x^2+y^2)^\alpha$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(4) Soient a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles). On suppose que les fonctions a, b, a' et b' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que la formule
$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a(nx) b(ny)$$
a un sens pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(5) Soit $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'on a $Df(0) = 0$, et qu'il existe une constante M telle que
$$\forall i,j \in \{1, \dots, n\}\, \forall u \in \mathbb{R}^n \ : \ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) \right| \leq M \,.$$
En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a
$$|f(h) - f(0)| \leq \frac{M}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} |h_i| \right)^2 .$$

(6) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point.

(7) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$ et soit $a > 0$. On note $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x + y + \frac{a}{xy} \cdot$$

(a) Montrer que$f$ est convexe.

(b) Montrer que f admet un minimum et calculer ce minimum.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, $(E, \|\ \ \|)$ est un espace vectoriel normé, et on note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de sa norme naturelle. Pour $X, Y \in \mathcal{L}(E)$ on pose $XY = X \circ Y$; et pour $X \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $X^k = \underbrace{X \circ \cdots \circ X}_{k \text{ fois}}$. Enfin, on pose $X^0 = Id$.

(1) Soit Z un espace vectoriel normé, et soient $f : Z \to \mathcal{L}(E)$ et $g : Z \to \mathcal{L}(E)$ deux applications différentiables. On note $fg : Z \to \mathcal{L}(E)$ l'application $x \mapsto f(x)g(x)$. Montrer que fg est différentiable, avec (pour $x, h \in Z$)

$$D(fg)(x)h = f(x)\,(Dg(x)h) + (Df(x)h)\,g(x)\,.$$

(2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $p_k : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $p_k(X) = X^k$.

(a) En utilisant (1), montrer par récurrence sur k que p_k est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et que pour $k \geq 1$ et $X, H \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$Dp_k(X)H = \sum_{j=0}^{k-1} X^j H X^{k-1-j}\,.$$

(b) Montrer qu'on a $\|Dp_k(X)\| \leq k\,\|X\|^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ et pour tout $X \in \mathcal{L}(E)$.

(3) Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(E)$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\|B^k - A^k\| \leq k \max(\|A\|, \|B\|)^{k-1}\,\|B - A\|\,.$$

(4) On suppose dans cette question que E est de dimension finie.

(a) Soit $R > 0$, et soit $\varphi :]-R, R[\to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière, $\varphi(x) = \sum_0^\infty c_k x^k$. Montrer que si $X \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|X\| < R$, alors on peut définir

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k\,.$$

(b) On garde les notations de (a) et on suppose que tous les coefficients c_k sont *positifs*. Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $\|A\|, \|B\| < R$ et si on pose $r = \max(\|A\|, \|B\|)$, alors

$$\|\varphi(B) - \varphi(A)\| \leq \varphi'(r)\, \|B - A\|\,.$$

Exercice 2. Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\cdot$$

D'autre part, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note e_θ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(H1) $\Delta f = 0$.

(H2) $\forall p \in \mathbb{R}^2\ \forall r > 0\ :\ f(p) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}\,\cdot$

(1) Soit $p \in \mathbb{R}^2$ fixé.

(a) Montrer qu'on a $\int_0^{2\pi} Df(p)e_\theta\, d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} D^2f(p)(e_\theta, e_\theta)\, d\theta = \pi\, \Delta f(p)$.

(b) En déduire que lorsque r tend vers 0, on a

$$\int_0^{2\pi} f(p + re_\theta)\, d\theta = 2\pi f(p) + \frac{\pi r^2}{2}\, \Delta f(p) + o(r^2)\,.$$

(2) Montrer que (H2) entraîne (H1).

(3) Soit à nouveau $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta)\, d\theta.$$

(a) On pose $F(r, \theta) = f(p + re_\theta) = f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$. Exprimer $\varphi'(r)$ à l'aide de $\frac{\partial F}{\partial r}$, et $\varphi''(r)$ à l'aide de $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\,\cdot$.

(b) Soit G la fonction définie par

$$G(r, \theta) = \sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - \cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\,.$$

Établir la formule

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) = r\Delta f(p + re_\theta)\,.$$

(c) Déduire de (a) et (b) qu'on a

$$\frac{d}{dr}\Big(r\varphi'(r)\Big) = r\int_0^{2\pi} \Delta f(p + re_\theta)\, d\theta\,.$$

(4) Montrer que (H1) entraîne (H2).