Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

DS du 28 Octobre 2010

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, et soit $R>0$. On suppose qu'il existe une constante C telle que $|c_k|\leq C\,R^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Montrer que pour toute matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A\|<1/R$, la série $\sum c_k A^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Soient F un espace vectoriel normé de dimension finie, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $\varphi:[a,b]\to F$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On suppose qu'on a $\|\varphi'(t)\|\leq g'(t)$ pour tout $t\in[a,b]$. En utilisant le "théorème fondamental de l'analyse", montrer qu'on a $\|\varphi(b)-\varphi(a)\|\leq g(b)-g(a)$.

(3) Montrer que la formule

$$f(x,y,z)=(x\cos(y-z),z^3\sqrt{y-x^2})$$

définit une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ à préciser (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$), et écrire la matrice Jacobienne de f en un point $(x,y,z)\in\Omega$.

(4) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable, et soit $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$. Exprimer la dérivée de la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(th)$ à l'aide des dérivées partielles de f.

Exercice 1. Soient α et β deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et

$$f(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta\,\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\quad\text{si }\ (x,y)\neq(0,0)\,.$$

(1) Montrer que f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha+\beta>2$.

(2) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

(3) Déterminer à quelle condition (portant sur α et β) la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

(1) Montrer que l'application bilinéaire $B : E \times E \to E$ définie par $B(u,v) = uv$ est continue.

(2) Soit $f : E \to E$ l'application définie par $f(u) = u^3$.

  (a) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer $Df(u)$ pour toute $u \in E$.

  (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\text{(E)} \qquad a\,\frac{\partial f}{\partial x} + b\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On pose $\Delta = a^2 + b^2$ et on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(u,v) = f\left(\frac{au - bv}{\Delta}, \frac{bu + av}{\Delta}\right).$$

  (a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide de g.

  (b) Calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ en fonction des dérivées partielles de f.

(2) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme

$$f(x,y) = \varphi(-bx + ay)\,,$$

où φ est une une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose qu'on a $\Phi(0) = I$ et

$$(*) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R} \ : \ \Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)\,.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *On rappelle que l'exponentielle d'une matrice M est définie par $e^M = \sum_0^\infty \frac{M^k}{k!}$, et que la dérivée de e^{tA} (par rapport à t) est Ae^{tA}.*

(1) On suppose que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

  (a) En utilisant l'identité $(*)$, montrer qu'il existe une matrice A telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ \Phi'(t) = A\Phi(t)\,.$$

  (b) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) On suppose seulement que l'application Φ est continue.

(a) Pour $h > 0$, on pose $M(h) = \int_0^h \Phi(s)\,ds$. Déterminer la limite de $\frac{M(h)}{h}$ quand h tend vers 0.
(b) Déduire de (a) qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que la matrice $M(\delta)$ est inversible.
(c) En utilisant un changement de variable, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_t^{t+\delta} \Phi(u)\,du = M(\delta)\Phi(t)\,.$$
(d) En déduire que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(e) Conclure.