Corrigé succint de l'examen

Questions de cours.

(1) (a) Comme B est bilinéaire continue, on a une constante $C < \infty$ telle que $|B(u,v)| \leq C\|u\|\,\|v\|$ pour tous $u, v \in E$. On en déduit $|f_\alpha(x)| \leq C\,\|x\|^{2\alpha}$ pour tout $x \in E$, et donc $f_\alpha(x) = o(\|x\|)$ au voisinage de 0 si $2\alpha > 1$, i.e. $\alpha > 1/2$. D'où le résultat.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_{1/2}(0+te) = |B(te,te)|^{1/2} = \left(t^2|B(e,e)|\right)^{1/2} = a\,|t|$, où $a = |B(e,e)| \neq 0$. Comme la fonction $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0, on en déduit que $f_{1/2}$ n'est pas dérivable en 0 dans la direction de e.

(2) Si on pose $\gamma(t) = tx$ et $\varphi(t) = f(tx) = f(\gamma(t))$, alors $\varphi'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = Df(tx)x = \sum_{j=1}^n \partial_j f(tx)\,x_j$.

(3) Par composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et il est facile de calculer (sans se presser pour ne pas se tromper) ses dérivées partielles en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. D'autre part, on vérifie directement (en revenant à la définition d'une dérivée partielle) que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et valent toutes les deux 0. Pour conclure, il faut alors montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (que l'on a su calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$) tendent vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$; par exemple en passant en coordonnées polaires. Ce genre d'exercices a été fait plusieurs fois en TD.

(4) Il faut montrer que la série converge en tout point (x,y), puis il suffit de vérifier que les séries des dérivées partielles convergent normalement sur $\mathbb{R}^2$. On a fait le même exercice en TD.

(5) La formule de Taylor (à l'ordre 2) entre 0 et h s'écrit

$$f(h) = f(0) + Df(0)h + \int_0^1 (1-t)D^2f(th)h^{[2]}\,dt\,,$$

autrement dit

$$f(h) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(th)\,h_i h_j\,dt\,.$$

On a donc

$$|f(h) - f(0)| \leq M \sum_{i,j=1}^n |h_i|\,|h_j| \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{M}{2}\sum_{i,j=1}^n |h_i|\,|h_j|\,,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

(6) Il y avait une erreur dans l'énoncé : la fonction f est un difféomorphisme local en tout point (x,y) *tel que* $x \neq 0$. Cela se montre en calculant le déterminant Jacobien $J_f(x,y)$ (on trouve $J_f(x,y) = x$) et en appliquant le théorème d'inversion locale.

(7) (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour montrer qu'elle est convexe, on calcule la matrice Hessienne et on montre qu'elle est positive (en fait définie positive) en tout point.
(b) Comme f est convexe par (a), on sait que tout point critique de f va être un minimum global pour f. Il faut donc chercher les (x,y) tels que les deux dérivées partielles de f s'annulent en (x,y). On trouve une seule solution (x_0,y_0) (qu'il faut expliciter), et le minimum de f est alors $f(x_0,y_0)$ (qu'il faut calculer).

Exercice 1. (1) Soit $x \in Z$ fixé. Comme f et g sont différentiable en x, on peut écrire $f(x+h) = f(x) + Df(x)h + R_1(h)$ et $g(x) = g(x) + Dg(x)h + R_2(h)$, où $R_1(h) = o(\|h\|)$ et $R_2(h) = o(\|h\|)$ au voisinage de 0. On a donc

$$\begin{aligned} fg(x+h) &= (f(x) + Df(x)h + R_1(h))\,(g(x) + Dg(x)h + R_2(h)) \\ &= fg(x) + (Df(x)h)g(x) + f(x)(Dg(x)h) + R(h)\,, \end{aligned}$$

où $R(h) = f(x)R_2(h) + R_1(h)g(x) + (Df(x)h)(Dg(x)h) + (Df(x)h)R_2(h) + R_1(h)(Dg(x)h) + R_1(h)R_2(h)$.
On a $\|R(h)\| \leq \|f(x)\|\,\|R_2(h)\| + \|R_1(h)\|\,\|g(x)\| + \|Df(x)\|\,\|Dg(x)\|\,\|h\|^2 + \|Df(x)\|\,\|h\|\,\|R_2(h)\| + \|R_1(h)\|\,\|Dg(x)\|\,\|h\| + \|R_1(h)\|\,\|R_2(h)\|$, donc $R(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$. De plus, l'application linéaire $L : Z \to \mathcal{L}(E)$ définie par $L(h) = (Df(x)h)g(x) + f(x)(Dg(x)h)$ est continue car

$$\|L(h)\| \leq \Big(\|f(x)\|\,\|Dg(x)\| + \|Df(x)\|\,\|g(x)\|\Big)\,\|h\| = C\,\|h\|$$

pour tout $h \in Z$. Par conséquent, fg est différentiable en x et $D(fg)(x) = L$.

(2) (a) Le résultat est évident pour $k = 0$ et $k = 1$. Pour $k = 1$, la formule s'écrit $Dp_1(X)H = H$. Si le résultat est démontré pour k, alors, en écrivant $p_{k+1} = p_1 p_k$ et en utilisant (1), on voit que p_{k+1} est différentiable en tout point $X \in \mathcal{L}(E)$, avec

$$
\begin{aligned}
Dp_{k+1}(X)H &= Dp_1(X)H + p_1(X)Dp_k(X)H \\
&= H + X\sum_{j=0}^{k-1} X^j H X^{k-1-j} \\
&= H + \sum_{j=0}^{k-1} X^{j+1} H X^{k-(j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} X^j H X^{k-j}.
\end{aligned}
$$

C'est bien la formule souhaitée au rang $k+1$.

(b) D'après (2), on a

$$
\|Dp_k(X)H\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \|X\|^j \|H\| \, \|X\|^{k-1-j} = k\,\|X\|^{k-1}\,\|H\|
$$

pour tout $H \in \mathcal{L}(E)$, et donc $\|Dp_k(X)\| \leq k\,\|X\|^{k-1}$.

(3) D'après l'inégalité des accroissements finis, on peut trouver un $X \in [A, B]$ tel que $\|B^k - A^k\| \leq \|Dp_k(X)\|\,\|B - A$. De plus, on a $Dp_k(X) \leq k\,\|X\|^{k-1}$ d'après (3), et $\|X\| \leq \max(\|A\|, \|B\|)$ puisque $X \in [A, B]$; d'où le résultat.

(4) (a) Il s'agit de montrer que la série $\sum c_k X^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie par hypothèse,il suffit de vérifier que la série numérique $\sum \|c_k X^k\|$ est convergente; et ceci est clair puisque $\|c_k X^k\| \leq |c_k|\,\|X\|^k$ et la série entière $\sum c_k x^k$ converge absolument en tout point de l'intervalle $]-R, R[$.

(b) On a

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(B) - \varphi(A)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (B^k - A^k) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k \|B^k - A^k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, r^k \|B - A\| \\
&= \varphi'(r)\,\|B - A\|\,,
\end{aligned}
$$

où on a utilisé le fait que les c_k sont positifs à la deuxième ligne, et (3) à la ligne suivante.

Exercice 2. (1) (a) On a

$$\int_0^{2\pi} Df(p)e_\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \times \sin\theta \right) d\theta = 0$$

car $\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0 = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta$. D'autre part, $D^2 f(p)(e_\theta, e_\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) \times \cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \times \cos\theta \sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \times \sin^2\theta$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. Comme $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta$ (exercice!) et $\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \, d\theta = 0$, on en déduit

$$\int_0^{2\pi} D^2 f(p)(e_\theta, e_\theta) \, d\theta = \pi \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \right) = \pi \, \Delta f(p) \, .$$

(b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, elle admet un développement limité à l'ordre 2 : on a $f(p+h) = f(p) + Df(p)h + \frac{1}{2}D^2 f(p)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ au voisinage de 0, où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Avec $h = re_\theta$, cela s'écrit $f(p + re_\theta) = f(p) + rDf(p)e_\theta + \frac{r^2}{2}D^2 f(p)(e_\theta, e_\theta) + r^2\varepsilon(re_\theta)$. En intégrant par rapport à θ et en utilisant (a), on en déduit

$$\int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \, d\theta = 2\pi f(p) + \frac{\pi r^2}{2} \Delta f(p) + r^2 \alpha(r) \, ,$$

où $\alpha(r) = \int_0^{2\pi} \varepsilon(re_\theta) \, d\theta$ tend vers 0 quand $r \to 0$, car $\varepsilon(re_\theta)$ tend vers 0 *uniformément* par rapport à $\theta \in [0, 2\pi]$. D'où le résultat.

(2) Si (H2) est vérifiée, alors on obtient immédiatement $\Delta f(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ en divisant par r^2 et en faisant tendre r vers 0 dans (1b).

(3) Soit à nouveau $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \, d\theta.$$

(a) On peut dériver sous l'intégrale (exercice : le justifier proprement), ce qui donne $\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) \, d\theta$ et $\varphi''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) \, d\theta$.

(b) C'est un calcul assez long mais "sans astuce" utilisant uniquement la formule pour les dérivées partielles d'une fonction composée.

(c) En intégrant la formule trouvée en (b) par rapport à θ et en utilisant (a), on obtient

$$\varphi'(r) + r\varphi''(r) - \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) \, d\theta = r \int_0^{2\pi} \Delta f(p + re_\theta) \, d\theta \, .$$

De plus, on a $\int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) \, d\theta = [G(r, \theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$ car $G(r, \theta)$ est 2π-périodique par rapport à θ, ce qui donne le résultat souhaité puisque $\varphi'(r) + r\varphi''(r) = \frac{d}{dr}(r\varphi'(r))$.

(4) Supposons (H1) vérifiée, et fixons $p \in \mathbb{R}^2$. Avec les notations de (3), on a $\frac{d}{dr}\left(r\varphi'(r)\right) = 0$ d'après (3c). Donc la fonction $r \mapsto r\varphi'(r)$ est constante sur $\mathbb{R}$, et donc identiquement nulle puisqu'elle vaut 0 pour $r = 0$. On en déduit $\varphi'(r) = 0$ pour tout $r \neq 0$, et donc φ est constante sur $]0, \infty[$. Comme φ est continue en 0, elle est donc en fait constante sur $[0, \infty[$. Autrement dit, on a $\int_0^{2\pi} f(p + re_\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(p + 0)\, d\theta = 2\pi\, f(p)$ pour tout $r > 0$. C'est la condition (H2).