Corrigé succint du DS

Questions de cours.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|c_k A^k\| \leq CR^k \|A^k\| \leq CR^k \|A\|^k = C(R\|A\|)^k$. Comme $R\|A\| < 1$, la série $\sum \|c_k A^k\|$ est donc convergente, et par conséquent la série $\sum c_k A^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) D'après le "théorème fondamental de l'analyse", on a $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)\, dt$, et donc

$$\begin{aligned} \|\varphi(b) - \varphi(a)\| &\leq \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt \\ &\leq \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a)\,. \end{aligned}$$

(3) Les composantes de $f(x, y, z)$ possèdent des dérivées partielles continues dans l'ouvert $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y > x^2\}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Pour écrire la matrice Jacobienne, ne pas se tromper entre les lignes et les colonnes.

(4) Posons $\gamma(t) = th$. D'après le théorème des fonctions composées, on a $\varphi'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = Df(th)h$, autrement dit

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(th) \times h_j\,.$$

Exercice 1. (1) Pour tout $x > 0$, on a $f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\log}(2x^2)2x^2 = \frac{x^{\alpha+\beta-2}}{2} \log(2x^2)$. Si $\alpha + \beta \leq 2$, cette expression ne tend pas vers 0 quand $x \to 0^+$ et donc f n'est pas continue en $(0, 0)$. Inversement, si on pose $h = (x, y)$, on a $|x| \leq \|u\|$, $|y| \leq \|u\|$ et $x^2 + y^2 = \|u\|^2$; donc

$$|f(h)| \leq \|h\|^{\alpha+\beta-2} \log(\|h\|^2) = 2\|h\|^{\alpha+\beta-2} \log(\|h\|)\,,$$

ce qui prouve que $f(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 si $\alpha + \beta > 2$, puisque "les puissances l'emportent sur les logarithmes".

(2) On a $f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ pour tout $x \neq 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(3) D'après (2), le seul candidat possible pour $Df(0,0)$ est $L = 0$. Il s'agit donc de voir si on a $f(h) = o(\|h\|)$ quand h tend vers 0, autrement dit (puisque $\|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{1/2}$) si on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta \log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0\cdot$$

En raisonnant exactement comme dans (1), on trouve que cela est vrai si et seulement si $\alpha + \beta > 3$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

(1) Si $u, v \in E$ alors $|u(t)v(t)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc $\|B(u,v)\| = \|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$. D'après le critère de continuité pour les applications bilinéaires, on en déduit que B est continue.

(2) (a) Soit $p \in E$ fixée. Pour tout $h \in E$, on a $(p+h)^3 = p^3 + 3p^2h + 3ph^2 + h^3$, autrement dit

$$f(p+h) = f(p) + 3p^2h + R(h),$$

avec $R(h) = 3ph^2 + h^3$. L'application $L : E \to E$ définie par $L(h) = 3p^2h$ est linéaire continue car $L(h) = B(3p^2, h)$. D'autre part, on a $\|R(h)\|_\infty \leq 3\|p\|_\infty \|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3$ et donc $R(h) = 0(\|h\|^2) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$. Cela montre que f est différentiable en tout point $p \in E$, avec $Df(p)h = 3p^2h$.

(b) Si $u, v \in E$ alors

$$\|(Df(v) - Df(u))h\|_\infty = \|3(v^2 - u^2)h\|_\infty \leq 3\|v^2 - u^2\|_\infty \|h\|_\infty$$

pour tout $h \in E$, et donc

$$\|Df(v) - Df(u)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 3\|v^2 - u^2\|_\infty = \|B(v,v) - B(u,u)\|_\infty.$$

Comme l'application $x \mapsto B(x,x)$ est continue par (1), on en déduit que Df est continue de E dans $\mathcal{L}(E)$. Autrement dit, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. (1) (a) En posant $x = x(u,v) = \frac{au - bv}{\Delta}$ et $y = y(u,v) = \frac{bu + av}{\Delta}$, il s'agit d'exprimer (u,v) en fonction de (x,y), donc d'inverser un système linéaire 2-2. On trouve $(u,v) = (ax + by, -bx + ay)$, et donc $f(x,y) = g(ax + by, -bx + ay)$.

(b) Comme $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, on applique la formule pour les dérivées partielles de fonctions composées. En abrégé :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

ce qui donne
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{\Delta}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x(u,v), y(u,v))\,.$$

(2) Soit f une solution de (E), et soit $g(u,v)$ la fonction associée donnée par (1). D'après (1b), on a $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$, donc $g(u,v)$ ne dépend pas de u. On peut donc écrire $g(u,v) = \varphi(v)$ pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et donc $f(x,y) = \varphi(-bx+ay)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\varphi(v) = g(0,v)$.

Inversement, on vérifie en calculant les dérivées partielles (calcul qu'il *faut* faire) qu'une fonction de la forme $f(x,y) = \varphi(-bx+ay)$ est bien solution de (E).

Exercice 4. (1) (a) En dérivant $(*)$ par rapport à s, on obtient
$$\Phi'(s+t) = \Phi'(s)\Phi(t)\,.$$
En prenant $s=0$, on en déduit $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, avec $A = \Phi'(0)$.

(b) La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule pour la dérivée d'un produit, on a
$$\Psi'(t) = -Ae^{-tA}\Phi(t) + e^{-tA}\Phi'(t) = -Ae^{-tA}\Phi(t) + e^{-tA}A\Phi(t)\,.$$
Comme $Ae^{-tA} = e^{-tA}A$, on a donc $\Psi'(t) \equiv 0$, donc Ψ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $\Psi(0) = e^{-0}\Phi(0) = I$, on a $\Psi(t) = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $\Phi(t) = e^{tA}$.

(2) (a) Comme Φ est continue, la fonction $x \mapsto M(x) = \int_0^x \Phi(s)\,ds$ est une primitive de Φ. De plus, on a $M(0) = 0$. Donc $\frac{M(h)}{h} = \frac{M(h)-M(0)}{h-0}$ tend vers $M'(0) = \Phi(0)$ quand $h \to 0$, autrement dit $\lim_{h\to 0}\frac{M(h)}{h} = I$.

(b) Comme $\det(I) = 1$ et que la fonction dterminant est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, le déterminant de $M(h)/h$ tend vers 1 quand $h \to 0$. On peut donc certainement trouver $\delta > 0$ tel que $\det(M(\delta)/\delta) > 0$. Alors $M(\delta)/\delta$ est inversible, donc $M(\delta)$ aussi.

(c) En posant $u = s+t$, on obtient $\int_t^{t+\delta}\Phi(u)\,du = \int_0^\delta \Phi(s+t)\,ds = \int_0^\delta \Phi(s)\Phi(t)\,ds$. Comme $\Phi(t)$ ne dépend pas de s, on peut le sortir de l'intégrale, ce qui donne $\int_t^{t+\delta}\Phi(u)\,du = \left(\int_0^\delta \Phi(s)\,ds\right)\Phi(t) = M(\delta)\Phi(t)$.

(d) D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F définie par $F(t) = \int_t^{t+\delta}\phi(u)\,du = \int_0^{t+\delta}\Phi(u)\,du - \int_0^t \Phi(u)\,du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (avec $F'(t) = \Phi(t+\delta) - \Phi(t)$). Comme $M(\delta)$ est inversible, on a $\Phi(t) = M(\delta)^{-1}F(t)$ d'après (c), et par conséquent Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(e) Maintenant qu'on sait que Φ est $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer (1b) pour conclure que $\Phi(t)$ est de la forme e^{tA}.