Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

Exercice 1. (prolongement méromorphe de ζ)

(1) Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors
$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt\,.$$

(2) En déduire que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Omega = \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$, avec pour seul pôle le point $s = 1$.

Exercice 2. (prolongement méromorphe de Γ)

(1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(z) > 0$, alors
$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt\,.$$

(2) En déduire que la fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs.

Exercice 3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa **transformée de Fourier** $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule
$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt\,.$$

On ne suppose connu aucun résultat sur la transformation de Fourier (en particulier, on ne tiendra pas pour acquis le fait que si $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$).

(1) On suppose que f est bornée et à support compact. Montrer que $\widehat{f}$ se prolong de manière unique en une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donner une expression intégrale pour les dérivées de F en 0.

(2) On suppose que f est continue à support compact, et que $\widehat{f}$ est également à support compact.
  (a) Montrer que $F = 0$,.
  (b) En déduire qu'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P(t)\, dt = 0$ pour tout polynôme P.
  (c) Montrer que $f = 0$.

Exercice 4. (transformée de Laplace)
Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ existe, au sens où $\int_0^X f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $X \to \infty$. On ne suppose *pas* que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

(1) Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^\infty f(t)dt$.
   (a) Pourquoi la fonction F est-elle bornée sur $[0, \infty[$?
   (b) En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante C telle que : pour tous A, B tels que $0 < A < B$ et pour tout $s \in \Omega$, on a
$$\left| \int_A^B f(t)e^{-st}dt \right| \leq |F(B)| + |F(A)| + C\, \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\, e^{-\mathrm{Re(s)}A}\,.$$
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \Omega \to \mathbb{C}$ par $L_n(s) = \int_0^n f(t)e^{-st}dt$. Montrer que L_n est holomorphe sur Ω.
(3) Montrer que la formule
$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
a un sens pour tout $s \in \Omega$, et que la fonction Lf est holomorphe sur Ω.

Exercice 5. (inégalité de Hölder)
(1) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soient f, g deux fonctions intégrables strictement positives sur X.
   (a) Soit $V = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Pour $z \in \overline{V}$, on pose
$$\Phi(z) = \frac{\int f^{1-z} g^z\, d\mu}{\left(\int f\, d\mu\right)^{1-z} \left(\int g\, d\mu\right)^z}\,.$$
   Montrer que Φ est continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V.
   (b) Montrer que pour tout $z = x + iy \in \overline{V}$, on a $|\Phi(z)| \leq |\Phi(x)|$.
   (c) En appliquant convenablement le principe du maximum, en déduire qu'on a $|\Phi(z)| \leq \max\{|\Phi(0)|, |\Phi(1)|\}$ pour tout $z \in \overline{V}$.
(2) Soit toujours $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soient f, g deux fonctions mesurables strictement positives sur X. Montrer que pour tout $\alpha \in [0\,, 1]$, on a
$$\int f^{1-\alpha} g^\alpha\, d\mu \leq \left(\int f\, d\mu\right)^\alpha \left(\int g\, d\mu\right)^{1-\alpha}\,.$$
(3) Démontrer l'inégalité de Hölder (pour les intégrales).

Exercice 6. Donner une formule pour $\Gamma'(z)$ et $\Gamma''(z)$, et en déduire que la fonction $\log \Gamma$ est convexe sur $]0, \infty[$.

Exercice 7. (formule des compléments)

(1) En utilisant convenablement le théorème de changement de variables, montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)} \cdot$$

(2) En utilisant un calcul fait en cours, en déduire la formule des compléments : si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \cdot$$

Exercice 8. Montrer que pour $s > 1$, on a
$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt\ .$$

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 .$$

(1) Montrer qu'on définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en posant
$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \cdot$$

(2) Montrer que si $w = a + ib \in \mathbb{C}$ (où a et b sont réels), alors $|\sin w|^2 \geq \mathrm{sh}^2\, b$.

(3) On définit $\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par
$$\Phi(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 - g(z)\,.$$

(a) Montrer que la fonction Φ est 1-périodique (i.e. $\Phi(z+1) = \Phi(z)$).

(b) Montrer à l'aide d'un développement limité que $(\pi/\sin(\pi z))^2 - 1/z^2$ admet une limite en 0.

(c) En déduire que la fonction Φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique. Dans la suite, on note encore Φ cette fonction.

(d) Montrer que si $z = x + iy$ avec $|y| > 1$ et $-1/2 \leq x \leq 1/2$, alors
$$|\Phi(z)| \leq \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}\,\pi}\right)^2 + 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} \cdot$$
En déduire que Φ est bornée sur la bande $\{-1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2\}$.

(e) Montrer que la fonction Φ est constante.

(4) Montrer qu'on a $\lim_{y\to+\infty} g(iy) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty} |\sin(\pi i y)| = +\infty$.

(5) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 10. Montrer que le produit infini $\prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k})$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$ et qu'on a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z} \cdot$$

Exercice 11. (théorème de Weierstrass)

Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n.

(1) On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\right) .$$

  (a) Calculer $W'_p(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

  (b) En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire

  $$1 - W_p(z) = z^{p+1}\varphi_p(z) ,$$

  où φ_p est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ s'écrivant $\varphi_p(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ avec des coefficients a_n *positifs*.

  (c) Déduire de (b) que si $|z| \leq 1$, alors

  $$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

(2) Montrer que la série $\sum(\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.