Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Calculer $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $I_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^4}\,dt$ et $I_2(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(t^2+1)^2}\,dt$.

Exercice 3. Pour $a > 1$, on pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$ ·

(1) Mettre $I(a)$ sous la forme $\int_{\partial\mathbb{D}} f_a(z)\,dz$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité et la fonction f_a est à déterminer.
(2) Calculer l'intégrale $I(a)$.

Exercice 4. Pour $r \in [0,1[$, calculer $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ ·

Exercice 5. (fractions rationnelles et logarithmes)

(1) Soit $F = P/Q$ est une fraction rationnelle à coefficients réels, sans pôles réels, avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de F à partie imaginaire strictement positive. En considérant les domaines élémentaires $K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\, \varepsilon \leq |z| \leq R\,,\, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, établir la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\log|x|\,dx = -2\pi\,\mathrm{Im}\left(\sum_{a\in\mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\,(F(z)\log(z), a)\right),$$

où log est la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$.

(2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|x|}{x^2-2x+2}\,dx\,.$$

Exercice 6. (fractions rationnelles sur $\mathbb{R}^+$)

(1) Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôles dans $\mathbb{R}^+$, avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. En considérant des domaines élémentaires de type "pacman", établir la formule suivante :

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = -\sum_{a\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}(F(z)\log(z), a)\,,$$

où log est la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

(2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}\,\cdot$

Exercice 7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 8. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1-n<\alpha<1$.

(1) Pour $0<\varepsilon<1<R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} = \{re^{i\theta};\ \varepsilon \le r \le R\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi/n\}\,.$$

(2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^n)}\,\cdot$

Exercice 9. Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx$ en utilisant les domaines élémentaires $K_{\varepsilon,R} = \{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z)\ge 0\,, \varepsilon \le |z| \le R\}$, $0<\varepsilon<1<R$.

Exercice 10. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan} z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}\,\cdot$$

(1) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$ fixé. Montrer que $F(\xi) = \frac{\operatorname{cotan}\xi}{\xi(\xi-z)}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et déterminer ses pôles ainsi que les résidus correspondants.

(2) Pour $N\in\mathbb{N}^*$, on note R_N le carré de sommets $\pm a_N \pm i a_N$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$. Dessiner R_N, puis montrer que pour tout $z\in\mathring{R}_N\setminus\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R_N}\frac{\operatorname{cotan}\xi}{\xi(\xi-z)}\,d\xi = \frac{\operatorname{cotan} z}{z} - \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{z^2-n^2\pi^2}\right).$$

(3) On rappelle que si $\xi = x+iy$, alors $|\sin\xi|^2 = \mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x$. Montrer qu'il existe une constante C (indépendante de N) telle que $|\operatorname{cotan}(\xi)|^2 \le C$ pour tout N et pour tout $\xi\in\partial R_N$, et en déduire la limite de $\int_{\partial R_N}\frac{\operatorname{cotan}\xi}{\xi(\xi-z)}\,d\xi$ quand $N\to\infty$.

(4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 11. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de calculer la somme

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\,\cdot$$

(1) Pour $n\in\mathbb{N}$, on note R_n le carré de sommets $\pm a_n \pm i a_n$, où $a_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$.
  (a) Déterminer la limite de $\int_{\partial R_n}\frac{\operatorname{cotan} z}{z^{2k}}\,dz$ quand $n\to\infty$.
  (b) Déterminer les pôles de $F(z) = \frac{\operatorname{cotan} z}{z^{2k}}$ à l'intérieur du rectangle R_n, et calculer les résidus correspondants.

(2) Calculer la somme S_k.

Exercice 12. (somme binômiale)

(1) Montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on a $C_n^k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \, dz$. En déduire la majoration $C_{2n}^n \leq 4^n$.

(2) Calculer l'intégrale $I = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$.

(3) En utilisant (1) et (2), établir la formule $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} C_{2n}^n = \sqrt{5}$.

Exercice 13. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$ à l'aide du théorème des résidus.

(1) Pour $R > 0$, on pose $a_R = (-R + 1/2) - iR$, $b_R = (R + 1/2) + iR$, $c_R = (R - 1/2) + iR$, $d_R = (-R - 1/2) - iR$, et note K_R le parallèlogramme $a_R b_R c_R d_R$. D'autre part, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on pose

$$f(z) = \frac{e^{i\pi(z-1/2)^2}}{1 - e^{-2i\pi z}} .$$

   (a) Calculer l'intégrale $\int_{\partial K_R} f(z) \, dz$ à l'aide du théorème des résidus.

   (b) En paramétrant les segments, montrer que $\int_{[a_R, b_R]} f(z) dz - \int_{[d_R, c_R]} f(z) dz$ tend vers $(1 + i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} dt$ quand $R \to \infty$.

(2) Calculer l'intégrale I.

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z) = az^n - e^z$ admet n zéros simples dans le disque unité $\mathbb{D}$.

Exercice 15. Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3 = 0$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

Exercice 16. (fonctions implicites)

(1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(0, r)$ et sans zéros sur $\partial D(0, r)$. On suppose que f admet un seul zéro a dans le disque $D(0, r)$, et que ce zéro est simple. Montrer qu'on a

$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} \, d\xi .$$

(2) Soit $r = 1/\sqrt{3}$, et soit V le disque $D(0, 2r/3)$.

   (a) En utilisant le théorème de Rouché, montrer que si $\lambda \in V$, alors il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$ et $z^3 + z = \lambda$. On pose $z = a(\lambda)$.

   (b) Montrer que la fonction a est holomorphe sur V.

Exercice 17. (théorèmes d'Hurwitz)
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction (holomorphe) f.

(1) On suppose que f n'est pas identiquement nulle. En utilisant le théorème de Rouché, montrer que pour tout $a \in \Omega$ on peut trouver $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que f et f_n ont le même nombre de zéros dans le disque $\overline{D}(a, r)$.
(2) Montrer que si les f_n ne s'annulent jamais, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien f ne s'annule jamais.
(3) On suppose que les fonctions f_n sont injectives. Montrer que la fonction f est soit injective, soit constante. (*Fixer $a \in \Omega$ et appliquer (2) aux fonctions* $g_n : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ définies par $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$).

Exercice 18. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le n-ième polynôme de Taylor de la fonction exponentielle :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \,,$$

et on note $Z(P_n)$ l'ensemble des zéros de P_n.

(1) Montrer que $R_n = \inf \{|z|;\ z \in Z(P_n)\}$ tend vers l'infini avec n.
(2) Montrer qu'on a $|P_n(\xi) - \frac{\xi^n}{n!}| < \frac{(2n)^n}{n!}$ pour tout $\xi \in \partial D(0, 2n)$.
(3) Montrer que $Z(P_n)$ est contenu dans le disque $D(0, 2n)$.

Exercice 19. Soit f une fonction holomorphe non constante dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| \leq |c_1| \,.$$

(1) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $h(z) = f(z) - c_1 z$, montrer que si z_0 est un point quelconque de $\mathbb{D}$ et si r vérifie $|z_0| < r < 1$, alors
$$|f(\xi) - f(z_0) - c_1(\xi - z_0)| < |c_1(\xi - z_0)|$$
pour tout $\xi \in \partial D(0, r)$.
(2) Montrer que la fonction f est injective.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est égale à $\pi \sum_1^\infty n|c_n|^2$.