Feuille d'exercices n^o 4

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Montrer à partir de la définition que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert Ω' contenant $\varphi(\Omega)$, alors la 1-forme $\omega = (f \circ \varphi)d\varphi$ est fermée sur Ω.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et ne s'annulant pas.

(1) Montrer par une calcul que $\omega = \frac{d\varphi}{\varphi}$ est fermée sur Ω.

(2) Montrer que $\frac{d\varphi}{\varphi}$ est exacte si et seulement si il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $e^g = \varphi$.

Exercice 3. Pour $\alpha > 0$, on note ω_α la 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$\omega_\alpha = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

Pour quelles valeurs de α la forme ω_α est-elle fermée?

Exercice 4. Dans tout l'exercice, ω est une 1-forme fermée sur $\mathbb{C}^*$.

(1) On pose $\Omega^+ = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^+)$ et $\Omega^- = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}^-)$.

  (a) Pourquoi ω est-elle exacte sur Ω^+ et sur Ω^-?

  (b) Montrer que si F est une primitive de ω sur Ω^- et si G est une primitive de ω sur Ω^+ telles que $F(1) = G(1)$ et $F(-1) = G(-1)$, alors F et G sont égales sur $\Omega^+ \cap \Omega^-$.

  (c) Soit F une primitive de ω sur Ω^-, et soit G la primitive de ω sur Ω^+ vérifiant $G(-1) = F(-1)$. Exprimer l'intégrale $\int_{\partial\mathbb{D}} \omega$ en fonction de $F(1)$ et $G(1)$.

(2) Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{C}^*$ si et seulement $\int_{\partial\mathbb{D}} \omega = 0$.

Exercice 5. Soit ω une 1-forme fermée sur $\mathbb{C}^*$. En utilisant l'exercice 4, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la forme $\omega - \lambda\frac{dz}{z}$ est exacte.

Exercice 6. Soit $\omega = Adz + Bd\bar{z}$ une 1-forme fermée sur $\mathbb{C}^*$.

(1) On pose $\|\omega(z)\| = |A(z)| + |B(z)|$, et on suppose qu'on a $\|\omega(z)\| = o(1/|z|)$ au voisinage de 0.

  (a) Déterminer $\lim_{r\to 0} \int_{\partial D(0,r)} \omega$.

  (b) En utilisant l'exercice 4, montrer que ω est exacte.

(2) Soit $\alpha > -1$. On suppose qu'on a $\omega(rz) = r^\alpha \omega(z)$ pour tout $r > 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que ω est exacte.

Exercice 7. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto F(t,z)$ est holomorphe sur Ω;
(ii) pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto F(t,z)$ est mesurable;
(iii) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur I telle que $|F(t,z)| \leq \varphi_K(t)$ pour tout $z \in K$ (et $t \in I$).

En utilisant convenablement le théorème de Morera, montrer que la formule

$$f(z) = \int_I F(t,z)\, dt$$

définit une fonction f holomorphe sur Ω.

Exercice 8. Soit U le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$. On suppose que f est continue sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U.

(1) Soit U^* le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) < 0\}$, et soit $f^* : U^* \to \mathbb{C}$ définie par $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que f^* est holomorphe dans U^*.
(2) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in I$. Déduire de (1) que f se prolonge en une fonction F holomorphe sur un ouvert Ω contenant $U \cup I$.
(3) On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 9. Montrer que tout lacet dans $\mathbb{C}^*$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet dont l'image est contenue dans le cercle unité $\mathbb{T}$.

Exercice 10. Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$.

(1) Soit $R > 0$ tel que $K \subset D(0,R)$. Si $p \in K$, quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{\partial D(0,R)} \frac{dz}{z-p}$?
(2) Montrer que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ n'est pas simplement connexe.

Exercice 11. Soient $D_1, \ldots, D_N$ des disques ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i < N$, et soit $\Omega = D_1 \cup \cdots \cup D_N$.

(1) On suppose que les centres des disques D_i sont alignés sur une droite L.
    (a) Pour $z \in \Omega$, on note $p(z)$ le projeté orthogonal de z sur la droite L. Montrer que le segment $[z, p(z)]$ est contenu dans Ω.
    (b) En déduire que tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet dont l'image est contenue dans L.
    (c) Montrer que Ω est simplement connexe.

(2) L'ouvert Ω est-il toujours simplement connexe (si les centres des disques D_i ne sont pas alignés)?

Exercice 12. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

(1) Montrer que toute fonction f holomorphe sur Ω et sans zéros possède une racine carrée holomorphe.
(2) Soit f une fonction holomorphe sur Ω et possédant un nombre fini de zéros. Montrer que f possède une racine carrée holomorphe si et seulement si tous ses zéros ont une multiplicité paire.

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose que f est bornée, et on pose $M = \sup\{|f(z)|;\ z \in \mathbb{D}\}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{D})$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $h(0) = 1$ et $h(z)^2 = 1 - \frac{f(z)}{b}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
   (b) On écrit $h(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. Déterminer a_0 et a_1.
   (c) Montrer qu'on a $|h(z)|^2 \leq 1 + \frac{M}{|b|}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et en déduire, à l'aide de (a) et de la formule de Parseval, l'inégalité $|b| \geq 1/4M$.
(2) Conclure que $f(\mathbb{D})$ contient le disque $D(0, 1/4M)$.

Exercice 14. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Montrer que si g est une fonction holomorphe sur Ω, alors on peut trouver une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ vérifiant $f'/f = g$. On pourra chercher f sous la forme e^h.

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe, alors, pour toute fonction f holomorphe sur Ω, l'équation différentielle $g' + ag = f$ admet une solution g holomorphe sur Ω.

Exercice 16. Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D = D(z_0, R)$ et ne s'annulant pas.

(1) Pourquoi existe-t-il une fonction $g \in H(D)$ telle que $f = e^g$?
(2) Montrer que pour tout $r \in]0, R[$, on a

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

Exercice 17. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\Delta u = 0$

(1) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors $u = \mathrm{Re}(f)$ est harmonique.

(2) On suppose Ω connexe. Soit f une fonction holomorphe sur Ω, et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) la fonction $\mathrm{Re}(f) - u$ est constante;
   (ii) $f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}$.

(3) Montrer que si Ω est simplement connexe, alors toute fonction harmonique $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Exercice 18. (théorème de Brouwer en dimension 2)
Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ une application continue. Le but de l'exercice est de montrer que f possède un point fixe.

(1) On suppose qu'on a $f(z) \neq z$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et on note $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ le lacet défini par $\gamma(t) = f(e^{it}) - e^{it}$.
   (a) En considérant $H(s,t) = f(se^{it}) - se^{it}$, montrer que γ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.
   (b) Montrer que γ est également homotope dans $\mathbb{C}^*$ au lacet $t \mapsto -e^{it}$.

(2) Démontrer le résultat souhaité

Exercice 19. (théorème de d'Alembert-Gauss "généralisé")
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f(z)/z^n$ admet une limite $l \neq 0$ quand $|z| \to \infty$.

(1) Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet défini par $\gamma_r(t) = f(re^{it})/r^n e^{int}$. Montrer que si r est suffisamment grand, alors γ_r est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, et est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.

(2) Soit $r > 0$. Montrer que si f ne s'annule pas sur $\overline{D}(0,r)$, alors γ_r est homotope dans $\mathbb{C}^*$ au lacet $t \mapsto f(0)/r^n e^{int}$.

(3) Déduire de (1) et (2) que f s'annule au moins une fois.