Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer que tous les c_n sont réels.

Exercice 2. (nombres de Fibonacci)

(1) Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$ est développable en série entière dans le disque $D = D(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

(2) On note a_n les coefficients du développement en série entière de f dans le disque D. En décomposant $f(z)$ en éléments simples, établir la formule

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \right].$$

(3) Montrer, sans utiliser (2), que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,.$$

En déduire que les a_n sont des entiers positifs.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(1) Montrer qu'on a $|c_n| \leq \frac{1}{r^n(1-r)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, 1[$.

(2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n| \leq e \times (n+1)$.

Exercice 4. (inégalité de Bohr)

(1) Soit g une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$. On suppose que la fonction $\mathrm{Re}(g)$ est positive.

  (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\left[g(re^{i\theta})\right] e^{-in\theta} d\theta\,.$$

  (b) En déduire qu'on a $|b_n| \leq 2\mathrm{Re}(b_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

  (a) Déduire de (1) qu'on a $|a_n| \leq 2(1 - \mathrm{Re}(a_0))$ pour tout $n \geq 1$.

  (b) Montrer qu'en fait $|a_n| \leq 2(1 - |a_0|)$ pour tout $n \geq 1$. (*Changer de fonction f*).

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, (1/3)^n \leq 1 \, .$$

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$.

(1) Soit r tel que $|z_0| < r < 1$. Montrer qu'on a

$$2i\pi f(0) = -\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n dz \, .$$

(2) En déduire que si $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r - |z_0|} \, |z_0| \, .$$

(3) Retrouver ce résultat en appliquant le principe du maximum à $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$ ·

Exercice 6. Montrer que si $g(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ est une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$, alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{2n+2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 \, dxdy \, .$$

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité $\mathbb{D}$.

(1) Pourquoi $f(\mathbb{D})$ est-il un ouvert de $\mathbb{C}$?

(2) On *admet* que f est un difféomorphisme de $\mathbb{D}$ sur l'ouvert $f(\mathbb{D})$. Montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est donnée par

$$Aire(f(\mathbb{D})) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dxdy \, .$$

(3) On écrit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Exprimer l'aire de $f(\mathbb{D})$ à l'aide des coefficients c_n. (*Utiliser l'exercice 6*).

Exercice 8. Dans tout l'exercice, f est une fonction entière, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'il existe deux constantes A et C telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} \, : \, |f(z)| \leq A e^{C|z|} \, .$$

(1) Montrer qu'on a $|c_n| r^n \leq A e^{Cr}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.

(2) En choisissant convenablement r dans (1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|c_n| \leq A \left(\frac{Ce}{n}\right)^n \, .$$

(3) Montrer que la série entière $\sum n!c_n z^{n+1}$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$. Pour $|w| > C$, on posera
$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!c_n}{w^{n+1}} \cdot$$
(4) Montrer que pour toute fonction entière h et pour tout $r > C$, on a
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} g(w)h(w)\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^{(n)}(0)\ .$$
(5) Montrer que pour $|w| > C$, on peut écrire
$$g(w) = \frac{1}{w} \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{w}\right) e^{-t}\, dt\ .$$
(6) Déterminer la fonction g lorsque $f(z) = e^z$ ou $f(z) = \sin z$.

Exercice 9. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \Omega$ une fonction holomorphe non-constante vérifiant $f \circ f = f$. Montrer qu'on a $f(z) = z$ pour tout $z \in \Omega$. (*Poser* $A = \{w \in \mathbb{C};\ f(w) = w\}$ *et utiliser le théorème de l'application ouverte*).

Exercice 10. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 11. Soit f une fonction entière vérifiant $f(1) = 1$ et $f(2iy) = 4f(iy)$ pour tout $y \in [2, 3]$.

(1) Pourquoi a-t-on $f(2x) = 4f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$?
(2) Calculer $f(2^{-k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis déterminer f.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que la fonction $u = \mathrm{Re}(f)$ est bornée. Montrer que f est constante. (*Considérer* $g = e^f$).

Exercice 13. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

(1) On suppose que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ est bien définie et *bornée* sur Ω.
(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est non-constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'on a $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = +\infty$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{D}$. (*Raisonner par l'absurde et appliquer le principe du maximum à* $1/f$)

Exercice 15. (méthode de Phragmén-Lindelöf)
On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{U}$ et holomorphe dans U. On suppose que f est bornée sur ∂U, et on suppose de plus qu'il existe un nombre $\alpha \in [0, 1[$ et une constante C tels que $|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}$ pour tout $z \in U$.

(1) Soit β vérifiant $\alpha < \beta < 1$.
  (a) On définit z^β dans $\overline{U}$ en prenant l'argument dans $]-\pi, \pi]$. Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\mathrm{Re}(z^\beta) \geq \delta |z|^\beta$ pour tout $z \in \overline{U}$.
  (b) Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : \overline{U} \to \mathbb{C}$ par
  $$f_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon z^\beta} f(z)\,,$$
  Montrer qu'on a $\lim_{|z|\to\infty} f_\varepsilon(z) = 0$.
  (c) En utilisant convenablement le principe du maximum, montrer qu'on a $\sup_{\overline{U}} |f_\varepsilon| = \sup_{\partial U} |f_\varepsilon|$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(2) Montrer que f est bornée sur $\overline{U}$, et qu'on a $\sup_{\overline{U}} |f| = \sup_{\partial U} |f|$.

Exercice 16. (inégalité de Bernstein)
Pour tout polynôme complexe R, on pose $\|R\|_\infty = \sup\{|R(z)|;\ |z| = 1\}$. Le but de l'exercice est de montrer que si P est un polynôme (non nul) de degré n, alors
$$\|P'\|_\infty \leq n\,\|P\|_\infty\ .$$

(1) Soit P un polynôme non nul de degré n.
  (a) En considérant le polynôme $P^*(z) = z^n P(1/z)$ et en appliquant le principe du maximum, montrer que si $|z| \geq 1$, alors $|P(z)| \leq \|P\|_\infty\, |z|^n$.
  (b) En déduire que si $|\lambda| > 1$, alors $Q(z) = P(z) - \lambda \|P\|_\infty\, z^n$ a toutes ses racines dans le disque unité $\mathbb{D}$.

(2) Soit Q un polynôme non constant.
  (a) On note $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les racines de Q, et $m_1, \dots, m_N$ leurs multiplicités. Exprimer $Q'(z)/Q(z)$ en fonction des α_i et des m_i.
  (b) En déduire que toute racine de Q' est combinaison convexe des racines de Q.

(3) Démontrer le résultat souhaité. (*Choisir w de module 1 tel que $|P'(w)| = \|P'\|_\infty$, puis λ tel que $P'(w) = n\lambda\|P\|_\infty w^{n-1}$*).

Exercice 17. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose
$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

(1) Soit $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée, avec $\|\phi\|_\infty \leq 1$.
  (a) Montrer que la fonction F_ϕ définie par $F_\phi(z) = \int_0^{2\pi} \phi(\theta) f(ze^{i\theta})\, d\theta$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. (*Développer f et série entière*).

(b) En utilisant le principe du maximum, montrer que pour tout $r \in [0,1[$ et pour tout $z \in D(0,r)$, on a $|F_\phi(z)| \leq I(r)$.

(2) Montrer que pour tout $r \in [0,1[$, il existe une fonction mesurable $\phi_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ telle que $|\phi_r(\theta)| = 1$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \phi_r(\theta) f(re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

(3) Déduire des questions précédentes que I est une fonction croissante de r : si $0 \leq r_1 < r_2 < 1$, alors $I(r_1) \leq I(r_2)$.

Exercice 18. (transformations de Möbius)
Soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\overline{a}$, on pose $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$.

(1) Calculer $|\varphi_a(\zeta)|$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.
(2) En déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
(3) Montrer que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2}\,,$$

et en déduire à nouveau qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(4) Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

Exercice 19. (automorphismes de $\mathbb{D}$)
Soit φ un automorphisme de $\mathbb{D}$, i.e. une bijection $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ telle que φ et φ^{-1} sont holomorphes.

(1) On suppose qu'on a $\varphi(0) = 0$. En appliquant le lemme de Schwarz à φ et φ^{-1}, montrer que φ est une rotation : $\varphi(z) = \lambda z$, où $|\lambda| = 1$.
(2) On ne suppose plus que $\varphi(0) = 0$. Montrer que φ est de la forme $\varphi(z) = \lambda\varphi_a(z)$, où $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$ (cf l'exercice 18).

Exercice 20. (forme invariante du lemme de Schwarz)
Soit f est une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{D}$. Avec les notations de l'exercice 18, calculer $\varphi_{f(b)} \circ f \circ \varphi_b(0)$.
(2) Montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{D}$, on a l'inégalité

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{1-\overline{f(b)}f(a)}\right| \leq \left|\frac{b-a}{1-\overline{b}a}\right|.$$

Exercice 21. Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0,r)$. On suppose qu'on a $f(0) = 0$, et qu'il existe une constante A telle que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq A$ pour tout $z \in D(0,r)$.

(1) Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(w) = \frac{f(rw)}{2A-f(rw)}$ est bien définie et holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$.
(2) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer qu'on a $|\phi(w)| \le |w|$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.
(3) En déduire que pour tout $z \in D(0,r)$, on a $|f(z)| \le 2A\,\frac{|z|}{r-|z|}$.

Exercice 22. Soit $r > 1$, et soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C_r = \{1/r < |z| < r\}$.

(1) Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(1/\bar{z})}$ est holomorphe sur C_r, et exprimer ses coefficients de Laurent en fonctions de ceux de f.
(2) On suppose qu'on a $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$. Montrer que f ne s'annule pas sur C_r, et qu'on a $\overline{f}(z) \equiv \frac{1}{f(1/\bar{z})}$ ·

Exercice 23. Déterminer les développements de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines indiqués.

(1) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $\{|z| < 1\}$, dans $\{1 < |z| < 2\}$ et dans $\{|z| > 2\}$.
(2) $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{3-z}$ dans $\{0 < |z-1| < 2\}$ et dans $\{0 < |z-3| < 2\}$.
(3) $\frac{1}{1-z}\,e^{1/z}$ dans $\{|z| > 1\}$ et dans $\{0 < |z| < 1\}$.

Exercice 24. Déterminer les singularités isolées des fonctions suivantes et préciser leur nature.

(1) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$.
(2) $g(z) = z^4\,(e^{1/z} - 1)$.
(3) $h(z) = \frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)$.

Exercice 25. Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Montrer que f est une fonction polynomiale. (*Poser $g(w) = f(1/w)$ et écrire le développement de Laurent de g dans $\mathbb{C}^*$*).

Exercice 26. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et telle que $|f(z)| = o(1/|z|)$ au voisinage de 0. Montrer que 0 est une singularité éliminable pour f.

Exercice 27. Soient f et g deux fonctions holomorphes non nulles dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) On suppose que tous les zéros de f sont également des zéros de g, avec multiplicité au moins égale. Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe dans Ω telle que $g = hf$.
(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et qu'on a $|g(z)| \le |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante c telle que $g = cf$.