Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. Soit $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

(1) Trouver une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\omega = dF$.

(2) Calculer $\int_\gamma \omega$, où γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant $(0,0)$ à $(2,4)$.

Exercice 2. Calculer $\int_\gamma 2xydx + (x^2 + 2y)dy$, où $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = e^{it}$.

Exercice 3. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $M = (1,1)$.

Exercice 4. (le plus court chemin est la ligne droite)
Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{C}_{p,q}$ l'ensemble de tous les chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

(1) Montrer qu'on a $|q - p| \leq l(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$, et qu'on peut avoir égalité.

(2) Soit $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ vérifiant $|q - p| = l(\gamma)$.

  (a) Montrer qu'on a $|\gamma(t) - p| + |q - \gamma(t)| \leq |q - p|$ pour tout $t \in [0,1]$.

  (b) Montrer que l'image de γ est le segment $[p, q]$.

Exercice 5. Soit $K = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\,, \mathrm{Re}(z) \geq 0\,, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(1) Calculer $I = \int_{\partial K} x^2dx$ directement à partir de la définition.

(2) Retrouver la valeur de I en appliquant la formule de Green-Riemann.

Exercice 6. Calculer de deux manières $I = \int_{\partial K} xy\,dx$, où K est le carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Exercice 7. Calculer de deux manières $\int_\gamma ydx$, où $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = Re^{it}$ $(R > 0)$.

Exercice 8. On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Montrer que si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors

$$m(K) = \frac{1}{2}\int_{\partial K}(xdy - ydx) = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \frac{1}{2i}\int_{\partial K} \bar{z}dz\,.$$

Exercice 9. (une preuve du théorème de Schwarz)
Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème de Schwarz (*si* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, *alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$).

(1) Soit $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour tout point $z_0 \in \Omega$, déterminer $\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D}(z_0,r)} \phi(x,y)\, dxdy$.
(2) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, et soit $\overline{D}$ un disque fermé contenu dans Ω. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale $\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dxdy$.
(3) Conclure.

Exercice 10. (formule de la divergence)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire. Pour tout point $z \in \partial K$, on note $n(z)$ le vecteur unitaire normal à ∂K au point z et dirigé vers l'extérieur de K. Montrer que si V est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, alors

$$\int_K \operatorname{div}(V)\, dxdy = \int_{\partial K} V(z) \cdot n(z)\, |dz|\,.$$

Exercice 11. (formule de Cauchy-Pompeiu)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit également K un domaine élémentaire contenu dans Ω.

(1) Soit $a \in \mathring{K}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(a,\varepsilon) \subset \mathring{K}$. Montrer qu'on a

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz + 2i \int_{K \setminus D(a,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a}\,.$$

(2) Montrer que pour tout point $a \in \mathring{K}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a}\,.$$

Exercice 12. Soient $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle (fermé) de centre $a \in \mathbb{C}$ et D un disque ouvert de centre a et contenant R. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, alors $\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial D} f(z)\, dz$.

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D} = \overline{D}(z_0, R)$.

(1) Montrer qu'on a $\int_{\partial D} (\bar{z} - f(z)) dz = 2i\pi R^2$. (*utiliser le théorème de Cauchy et l'exercice 8*).
(2) En déduire l'inégalité $\sup_{z \in \partial D} |\bar{z} - f(z)| \geq R$.

Exercice 14. (transformée de Fourier de la Gaussienne)

(1) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On supose qu'il existe une fonction continue $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ |f(z)| \leq \frac{C(y)}{1+x^2} \cdot$$

(a) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ib)\,dt$ est bien définie.
(b) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. En appliquant le théorème de Cauchy, montrer qu'on a $\int_{-R}^{R} f(t)\,dt - \int_{-R}^{R} f(t+ib)\,dt = i\int_0^b f(-R+is)\,ds - i\int_0^b f(R+is)\,ds$.
(c) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ib)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\ .$$

Quelle est la valeur de l'intégrale de droite?
(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt$.

Exercice 15. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

(1) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) = \alpha e^{it}$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = 4\int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,.$$

(2) En déduire la valeur de I.

Exercice 16. En considérant la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$ calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$.

Exercice 17. En intégrant e^{-z^2} sur le bord des secteurs angulaires

$$\Sigma_R = \left\{re^{i\theta};\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}\ ,\quad R > 0\,,$$

montrer que les intégrales $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$ et $\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt$ existent en un sens à préciser, et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt\ .$$

Exercice 18. En appliquant 2 fois le théorème de Cauchy, montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right| dt.$$

Exercice 19. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité, et soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| \neq 1$.
(1) Calculer l'intégrale $I(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z-a}$ en appliquant le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy.
(2) Calculer directement $I(a)$ en développant $\frac{1}{z-a}$ en série.

Exercice 20. Soit ω_0 la 1-forme différentielle $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{C}^*$.
(1) Montrer qu'on a $\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\omega_0$.
(2) En appliquant la formule de Cauchy, calculer l'intégrale $I = \int_{\partial R} \omega_0$, où R est le rectangle $[-1,1] \times [-1,1]$.
(3) Calculer I directement à partir de la définition de ω_0.

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < 1$. On pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-a|^2}$.
(1) Montrer qu'on a $I(a) = \frac{1}{i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{(z-a)(1-\bar{a}z)}$.
(2) En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 22. Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et Q sans racines dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Im}(z_0) > 0$, alors la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t-z_0}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z_0} dt$.

Exercice 23. Soit φ une fonction holomorphe au voisinage d'un segment $\Gamma = [ia, ib]$ de l'axe imaginaire ($a < b$). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on pose
$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\,.$$
(1) Soit $\zeta_0 \in]ia, ib[$ et soit $r > 0$ tel que φ est holomorphe au voisinage de $\overline{D}(\zeta_0, r)$, avec $]\zeta_0 - ir, \zeta_0 + ir[\subset]ia, ib[$. On pose $V = \{z \in D(\zeta_0, r);\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
  (a) Faire un dessin.
  (b) Calculer $\int_{\partial V} \frac{\varphi(\xi)}{\xi-z} d\xi$ pour $z \in V$ et pour $z \in D(\zeta_0, r) \setminus V$.
  (c) En déduire qu'il existe une fonction u continue sur $D(\zeta_0, r)$ telle que $\Phi(z) = -\varphi(z) + u(z)$ pour $z \in V$ et $\Phi(z) = u(z)$ pour $z \in D(\zeta_0, r) \setminus V$.
(2) Montrer que pour tout point $\zeta \in]\,ia, ib[$, on peut écrire
$$\varphi(\zeta) = \lim_{\substack{z\to\zeta \\ \mathrm{Re}(z)<0}} \Phi(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta \\ \mathrm{Re}(z)>0}} \Phi(z)\,.$$