

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soient f et g des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer qu'on a $d(fg) = fdg + gdf$, et $d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2$ si g ne s'annule pas. Montrer également que si f est à valeurs strictement positives, alors $d(\log f) = df/f$.

Exercice 2. Déterminer dF , $\frac{\partial F}{\partial z}$ et $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ dans les cas suivants, en précisant sur quel domaine F est de classe \mathcal{C}^1 : $F(z) = |z|^2$; $F(z) = \log |z|$; $F(z) = |z|$.

Exercice 3. Montrer que si f et g sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\frac{\partial(fg)}{\partial z} = g\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial z}$ et $\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$. En déduire $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$ lorsque P est une fonction polynomiale.

Exercice 4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables (à coefficients complexes) et soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = P(z, \bar{z})$. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction des dérivées partielles de P .

Exercice 5. (conjugaisons)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Si ω est une 1-forme différentielle sur Ω , on définit une 1-forme $\bar{\omega}$ en posant $\bar{\omega}(p) \cdot h = \overline{\omega(p) \cdot h}$.

- (1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $d\bar{f} = \overline{df}$.
- (2) Montrer que si $\omega = Adz + Bd\bar{z}$, alors $\bar{\omega} = \overline{B}dz + \overline{A}d\bar{z}$.
- (3) Déduire de (1) et (2) que si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$ et $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$.

Exercice 6. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{C} , et soient $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) Exprimer $d(g \circ f)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, df et $d\bar{f}$.
- (2) En déduire les formules suivantes :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}},$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \right) \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que la fonction f^* définie par $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega^* = \{z; \bar{z} \in \Omega\}$.

Exercice 8. (coordonnées polaires)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) On note $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Exprimer les dérivées partielles de \tilde{f} en fonction de celles de f .
- (2) Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en coordonnées polaires.

Exercice 9. Écrire l'équation de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 , et déterminer ses points de \mathbb{C} -dérivabilité.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = e^{-1/z^4}$ si $z \neq 0$.

- (1) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0, et que l'équation de Cauchy-Riemann est vérifiée en ce point.
- (2) La fonction f est-elle holomorphe?

Exercice 12. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que f ne prend que des valeurs réelles. Montrer que f est constante.

Exercice 13. (Laplacien)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Pour $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on pose $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Montrer qu'on a

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe, supposée de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que f' est holomorphe.

Exercice 15. (Fonctions harmoniques)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$.

- (1) Montrer que toute fonction holomorphe (de classe \mathcal{C}^2) est harmonique, et que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.
- (2) On suppose que Ω est un disque ou un rectangle, de centre $z_0 = (x_0, y_0)$. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds.$$

Montrer que la fonction $f = u + iv$ est holomorphe sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

- (3) Conclure que si Ω est un disque ou un rectangle, alors une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Exercice 16. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

- (1) Montrer qu'on a $d(\log |f|) = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \right)$.
- (2) Dédire de (1) que si f est holomorphe, alors $\log |f|$ est harmonique.
- (3) On veut redémontrer le résultat de (2) par une autre méthode.
 - (a) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 et une fonction g holomorphe sur U telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in U$. Exprimer $\log |f(z)|$ à l'aide de $g(z)$.
 - (b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 17. Soient V_1, V_2 deux ouverts de \mathbb{C} , et soient $f : V_1 \rightarrow V_2$ et $u : V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) En utilisant l'exercice 6, montrer que si f est holomorphe, alors $\frac{\partial(u \circ f)}{\partial z} = f' \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ f \right)$ et $\frac{\partial(u \circ f)}{\partial \bar{z}} = \bar{f}' \times \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \right)$.
- (2) On suppose que u et f sont de classe \mathcal{C}^2 , et que f est holomorphe. Dédire de (1) qu'on a $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f)$.
- (3) Conclure que si f est holomorphe et u harmonique, alors $u \circ f$ est harmonique.

Exercice 18. (fonctions harmoniques radiales)

- (1) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, exprimer Δf en coordonnées polaires.
- (2) Déterminer toutes les fonctions f harmoniques dans \mathbb{C}^* telles que $f(z)$ ne dépend que de $|z|$.

Exercice 19. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors

$$\Delta(|f|^2) = 4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{f} \Delta f) + 4 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 20. Soient f_1, \dots, f_n des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de \mathbb{C} . On suppose que la fonction $\sum_1^n |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les f_i sont constantes.

Exercice 21. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n^\alpha}{n!} z^n, \alpha > 0; \sum \frac{n^n}{n!} z^n; \sum \frac{1+a^n}{1+n^a} z^n, a > 0; \sum (1 + (-1)^n)^n z^n; \sum \frac{z^{n^2}}{n^n}.$$

Exercice 22. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}$ se développe en série entière dans le disque unité \mathbb{D} , et trouver les coefficients de son développement.

Exercice 23. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ la somme d'une série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

(1) On note Ω le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) < 1/2\}$. Montrer que la formule

$$F(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

a un sens pour tout $z \in \Omega$, et définit une fonction holomorphe dans Ω .

(2) Montrer que dans le disque $D(0, 1/2)$, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k a_k \right) z^n.$$

Exercice 24. Soit $\mathbf{a} = (a_n)$ une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$

(1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$? Dans la suite, on posera $S_{\mathbf{a}}(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$.

(2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$|e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x) - l| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^N \frac{|a_n - l|}{n!} x^n + \sup_{n>N} |a_n - l|.$$

(3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x)$.

Exercice 25. (critères d'Abel)

Soit (a_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un même ensemble X , et soit (b_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble Y . Montrer que dans les deux cas suivants, la série de fonctions $\sum a_n(x) b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

(1) Les sommes partielles de la série $\sum a_n(x)$ sont uniformément bornées sur X , la suite $(b_n(y))$ tend vers 0 uniformément sur Y , et $\sum_{n=N}^\infty |b_{n+1}(y) - b_n(y)|$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, uniformément sur Y .

(2) La série $\sum a_n(x)$ converge uniformément sur X , la suite $(b_n(y))$ est uniformément bornée sur Y , et il existe une constante C telle que $\forall y \in Y : \sum_0^\infty |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C$.

Exercice 26. (théorème d'Abel)

Soit $S(z) = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série $\sum c_n$ converge.

- (1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 25), montrer que la série $S(r)$ converge uniformément par rapport à $r \in [0, 1]$.
- (2) On note f la somme de la série S dans le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$. Montrer que $f(r)$ tend vers $\sum_0^\infty c_n$ quand r tend vers 1^- .

Exercice 27. (deux formules classiques)

- (1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 25), montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.
- (2) En déduire que pour tout point $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\text{Log}(1 - \zeta) .$$

- (3) Pour $x \in]0, 2\pi[$, établir les formules

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\log \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2} .$$

Exercice 28. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Exercice 29. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $0 \leq c < d \leq \pi$. Déterminer et dessiner l'image du rectangle $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par la fonction exponentielle.

Exercice 30. (formule d'Euler)

Montrer que pour tout nombre complexe z , on a $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$.

Exercice 31. Énoncer et démontrer les formules "bien connues" pour $\cos(u + v)$ et $\sin(u + v)$, où $u, v \in \mathbb{C}$.

Exercice 32. Montrer que pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a les identités suivantes :

$$\begin{cases} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \quad \text{et} \quad |\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x .$$

Exercice 33. (forme complexe de l'arctangente)

- (1) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1+it}{1-it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

- (2) Soient $w, z \in \mathbb{C}$, et soit $\xi = e^{iw}$. Montrer qu'on a $\tan(w) = z$ si et seulement si $\xi^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$.
- (3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(t) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+it}{1-it} \right)$.

Exercice 34. Résoudre l'équation $\cos z = 2$. (Poser $\xi = e^{iz}$).

Exercice 35. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(\tan(nz))$.

Exercice 36. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x + y > 0\}$. Dessiner Ω , vérifier que $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et déterminer l'image de Ω par la fonction Log .

Exercice 37. Soient L une détermination holomorphe du logarithme et Θ une détermination \mathcal{C}^∞ de l'argument sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer L' et $d\Theta$.

Exercice 38. Soit L une détermination *continue* du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$.

- (1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha)$, où Δ_α est la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$.
- (2) Avec les notations de (1), montrer que la fonction $L - \operatorname{Log}_\alpha$ est constante sur $D(z_0, r)$.
- (3) Montrer que L est holomorphe sur Ω .

Exercice 39. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) g est un logarithme de f , i.e. $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$;
- (ii) $g' = f'/f$ et $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ pour au moins un point $z_0 \in \Omega$.

Exercice 40. Calculer $\sqrt{4i}$.

Exercice 41. Calculer i^i et $(i^i)^i$.

Exercice 42. Déterminer l'image du demi-plan $U = \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ par la fonction $z \mapsto z^{1/4}$.

Exercice 43. On note \sqrt{z} la détermination principale de $z^{1/2}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

Exercice 44. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $z^{1/k}$ sur le cercle \mathbb{T} .