Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence-Master Maths
Module *Variable complexe*

Corrigé succint de l'examen

Questions de cours.

(1) Si $|z| < 2$, alors $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\sum_0^\infty (z/2)^k$, et donc
$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-7}}{2^{k+1}} = -\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+8}}\,.$$

(2) Voir le cours.

(3) Les racines de $v(z) = z^2 - 3z + 1$ sont $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, et seule β appartient au disque $\mathbb{D}$. De plus, β est un pôle simple de $f(z) = \frac{1}{v(z)}$, donc $\mathrm{Res}(f, \beta) = \frac{1}{v'(\beta)} = \frac{1}{2\beta-3} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Par le théorème des résidus, on a donc $I = -2i\pi/\sqrt{5}$.

(4) On applique le théorème de Rouché avec $f(z) = z^3 + 7z^2 + 10z + 3 = 0$ et $g(z) = 7z^2$. Si $\xi \in \partial D(0,3)$, alors $|g(\xi)| = 7 \times 3^2 = 63$ et $|f(\xi) - g(\xi)| = |\xi^3 + 7\xi^2 + 3| \leq 3^3 + 10 \times 3 + 3 = 60 < 63$. Par Rouché, f a donc le même nombre de zéros que g dans le disque $\overline{D}(0,3)$, à savoir 2.

(5) Il suffit de montrer que la série converge normalement sur tout compact de Ω, et ce genre de choses a été fait de nombreuses fois en cours comme en TD.

Exercice 1. (1) C'est une application du théorème sur les intégrales à paramètres holomorphes. Il fallait donc connaitre ce théorème et vérifier soigneusement les hypothèses.

(2) (a) Faire le dessin.
(b) L'intégrale vaut 0 par le théorème de Cauchy, puisque L est holomorphe au voisinage de $K_R(a)$.

(3) (a) On trouve 0 dans les 2 cas.

(b) On suit l'indication à la lettre, en commençant par modifier $L(s)$:

$$L(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-(s-a)t}dt = \int_0^\infty g_a(t)e^{-(s-a)t}dt\,.$$

On intègre par parties en dérivant g_a et en intégrant $e^{(s-a)t}$, et en faisant les choses proprement (on commence par intégrer sur $[0, X]$ et on fait tendre X vers l'infini). Au premier coup, le "crochet" $\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}g_a(t)\right]_0^X$ tend vers $\frac{1}{s-a}f(0)$ quand $X \to \infty$ car $g_a(X) \to 0$ et $|e^{-(s-a)X}| \leq 1$ (puisque $\mathrm{Re}(s-a) \geq 0$), et on obtient

$$L(s) = \frac{1}{s-a}f(0) + \frac{1}{s-a}\int_0^\infty g_a'(t)e^{-(s-a)t}d\,.t$$

Au deuxième coup, on aboutit à la formule demandée.

(c) On a $g_a''(t) = (a^2 - 2af'(t) + f''(t))e^{-at}$, et donc $|g_a''(t)| \leq C_a e^{-at}$ pour une certaine constante C_a puisque f' et f'' sont bornées. Comme $|e^{-(s-a)t}| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$ (puisque $\mathrm{Re}(s-a) \geq 0$), on en déduit

$$|\Phi_a(s)| \leq \frac{1}{|s-a|^2}\left(|g_a'(0)| + C_a\int_0^\infty e^{-at}dt\right) = \frac{M_a}{|s-a|^2}\,,$$

où la constante M_a est bien finie car $a > 0$.

(4) En paramétrant $\partial K_R(a)$ et en utilisant (2b), on obtient

$$\int_{-R}^{R} L(a+iy)\,idy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} L(a+Re^{it})\,iRe^{it}dt$$

pour tout $R > 0$. Comme $L(a+Re^{it}) = \frac{1}{Re^{it}} + \Phi(a+Re^{it})$ par (3b), cela s'écrit encore

$$i\int_{-R}^{R} L(a+iy)\,dy = i\pi f(0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Phi_a(a+Re^{it})\,iRe^{it}dt = i\pi f(0) + J_R\,.$$

Par (3c), on a de plus $|J_R| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{M_a}{R^2} \times R dt = \frac{\pi M_a}{R}$, et donc $J_R \to 0$ quand $R \to \infty$. En faisant tendre R vers l'infini, on obtient donc

$$i\int_{-\infty}^{\infty} L(a+iy)\,dy = i\pi f(0)\,,$$

ce qui est la formule demandée.

Exercice 2. (1) (a) On a $F(\xi) = \frac{\cos\xi}{\xi\sin\xi(\xi - z)}\cdot$ Les zéros du dénominateur sont $\xi = z$ et tous les multiples entiers de π. De plus, tous les zéros sont simples sauf $\xi = 0$ qui est double. Donc F est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec pôle simple en $\xi = z$ et $\xi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, et pôle double en $\xi = 0$.

(b) D'après les formules vues en cours pour le calcul d'un résidu en un pôle simple, on a $\operatorname{Res}(F, z) = \frac{\cos z}{z \sin z} = \frac{\operatorname{cotan} z}{z}$, et $\operatorname{Res}(F, n\pi) = \frac{\cos n\pi}{v'(n\pi)}$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, où $v(\xi) = \xi \sin \xi (\xi - z)$. Comme $v'(\xi) = \sin \xi \, (\xi(\xi - z))' + \xi(\xi - z) \cos \xi$ et $\sin(n\pi) = 0$, on trouve $v'(n\pi) = n\pi \cos(n\pi)(n\pi - z)$ et donc $\operatorname{Res}(F, n\pi) = \frac{1}{n\pi(n\pi - z)}$ ·

(c) (i) La fonction h est clairement holomorphe sur $D(0, \pi) \setminus \{0\}$, et elle est aussi continue en 0 car $\xi \operatorname{cotan} \xi \to 1$ quand $\xi \to 0$. Donc h a une singularité éliminable en 0, et elle est par conséquent holomorphe sur $D(0, \pi)$.

(ii) La fonction h est paire en tant que produit de 2 fonctions impaires. On en déduit que h' est impaire, et donc $h'(0) = 0$.

(iii) On a $F(\xi) = \frac{h(\xi)}{\xi^2(\xi - z)}$. Comme $\xi = 0$ est un pôle double, on a donc $\operatorname{Res}(F, 0) = g'(0)$, où $g(\xi) = \frac{h(\xi)}{\xi - z}$. Comme $g'(\xi) = \frac{h'(\xi)}{\xi - z} - \frac{h(\xi)}{(\xi - z)^2}$ et $h'(0) = 0$, on obtient $\operatorname{Res}(F, 0) = -\frac{h(0)}{z^2} = -\frac{1}{z^2}$ ·

(2) (a) Faire le dessin.

(b) Les pôles de la fonction F de (1) intérieurs à R_N sont le point z et tous les $n\pi$ avec $-N \leq n \leq N$. D'après le théorème des résidus et (1), on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R_N} \frac{\operatorname{cotan} \xi}{\xi(\xi - z)} \, d\xi &= \frac{\operatorname{cotan} z}{z} - \frac{1}{z^2} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{n\pi(n\pi - z)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi(n\pi - z)} \\
&= \frac{\operatorname{cotan} z}{z} - \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi} \left(\frac{1}{n\pi - z} - \frac{1}{-n\pi - z} \right) \\
&= \frac{\operatorname{cotan} z}{z} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{z^2 - n^2\pi^2} .
\end{aligned}$$

(3) (a) Fait en TD.

(b) On trouve sans difficulté $\operatorname{cotan}^2 \xi = \frac{1}{\sin^2 \xi} - 1$. On en déduit $|\operatorname{cotan} \xi|^2 \leq 1 + \frac{1}{|\sin^2 \xi|}$, donc il s'agit de *minorer* $|\sin^2 \xi|$ pour $\xi = x + iy \in \partial R_N$. Par définition de R_N, on a soit $x = \pm(N\pi + \pi/2)$ et donc $\sin^2 x = 1$, soit $y = \pm(N\pi + \pi/2)$ et donc $\operatorname{sh}^2 y \geq \operatorname{sh}^2(\pi/2)$. D'après (a), on a donc $|\sin^2 \xi| \geq c := \min(1, \operatorname{sh}^2(\pi/2))$ pour tout $\xi \in \partial R_N$, et on peut ainsi majorer $|\operatorname{cotan} \xi|$ par une constante indépendante de N (à savoir $C = \sqrt{1 + 1/c}$).

(c) On a $|\xi| \geq N\pi + \pi/2 \geq N\pi$ pour tout $\xi \in \partial R_N$. Donc, si $N\pi \geq 2|z|$ et $\xi \in \partial R_N$, alors $|\xi - z| \geq |\xi| - |z| \geq N\pi - |z| \geq N\pi/2$, et donc $|\xi(\xi - z)| \geq |\xi| \times N\pi/2 \geq N^2\pi^2/2$. D'où le résultat par (b).

(4) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors z est intérieur à R_N pour tout N suffisamment grand. D'après (2b), il suffit donc de montrer que l'intégrale $J_N = \int_{\partial R_N} \frac{\operatorname{cotan} \xi}{\xi(\xi - z)}\, d\xi$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. En effet, en faisant tendre N vers l'infini dans (2b), on obtient alors

$$\frac{\operatorname{cotan} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - n^2\pi^2}\,,$$

ce qui est la formule souhaitée. Pour majorer $|J_N|$, on utilise (3c) : on a

$$|J_N| \le \frac{M}{N^2} \int_{\partial R_N} |dz| = \frac{M}{N^2} \times 8(N\pi + \pi/2)$$

car le périmètre du carré R_N est égal à $8(N\pi + \pi/2)$; donc $|J_N| = O(1/N)$ et $J_N \to 0$ quand $N \to \infty$.

Exercice 3. (1) On dérive f/g et on trouve 0, ce qui donne le résultat puisque l'ouvert Ω est connexe.

(2) Cela prend 1 ligne, et on l'a fait en cours.

(3) Par le cours, $Z(f)$ est la réunion de $\{0\}$ et des zéros des fonctions $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$, autrement dit $Z(f) = \{0\} \cup \bigcup_{n \ge 1} \{\pm n\} = \mathbb{Z}$.

(4) Par le cours, on a (pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,,$$

où $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}\cdot$ En calculant calmement $\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ et en utilisant la formule pour $\operatorname{cotan} z$, on trouve sans difficulté le résultat demandé. Évidemment, il faut faire le calcul soi-même.

(5) Par (4), on a $f'/f = g'/g$ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, où $g(z) = \sin \pi z$. Par (1), on en déduit que $f(z) = c \sin \pi z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, pour une certaine constante c. Comme $f(z)/z \to 1$ quand $z \to 0$ par définition de f, la constante c vaut $\lim_{z \to 0} \sin \pi z / z = \pi$. Ainsi, on a $f(z) = \pi \sin \pi z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et le résultat est encore vrai pour $z \in \mathbb{Z}$ car alors les deux termes valent 0. D'où la formule souhaitée pour $\sin \pi z$.