Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence SM
Module MAT3

Examen du 21 Mai 2010

Durée : 2h

Sans documents

Question de cours. Énoncer la formule de Green-Riemann, et démontrer cette formule dans le cas d'un rectangle.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx\,.$$

(1) Dans cette question, on veut calculer l'intégrale double

$$J = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} \right) dy\,.$$

(a) Montrer que pour tout $y > 0$ fixé, on a $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\cdot$ (*Effectuer le changement de variable* $u = \sqrt{y}\, x$).

(b) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \pi$. (*Poser* $v = \sqrt{y}$).

(c) Calculer J.

(2) Soit $x \in]0, \infty[$ fixé.

(a) Montrer que la fonction $F(y) = \frac{1}{x^2-1} \log\left(\frac{1+x^2y}{1+y}\right)$ est une primitive de la fonction $f(y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ sur $]0, \infty[$.

(b) En déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2\,\frac{\log x}{x^2-1}\cdot$$

(3) En utilisant convenablement le théorème de Fubini, déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2. Soient $R, h > 0$. On note $\mathcal{C}(R,h) \subset \mathbb{R}^3$ le cône plein de hauteur h basé sur le disque $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

(1) Dessiner $\mathcal{C}(R,h)$.

(2) Montrer qu'en coordonnées cylindriques, un point $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ appartient à $\mathcal{C}(R, h)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \le z \le h \\ r \le R\left(1 - \frac{z}{h}\right) \end{cases}$$

(3) Calculer le volume du cône $\mathcal{C}(R, h)$.

(4) On note G le centre de gravité de $\mathcal{C}(R, h)$.
   (a) Pourquoi le point G est-il situé sur l'axe Oz?
   (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 3. Dans cet exercice, on note B la boule $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

(1) En utilisant les coordonnées sphériques, calculer l'intégrale

$$I = \int_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz\,.$$

(2) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que pour toute fonction positive f définie sur B, on a

$$\int_B f(x, y, z)\, dxdydz = \int_B f(y, z, x)\, dxdydz = \int_B f(z, x, y)\, dxdydz\,.$$

(*On pourra se contenter de montrer la première égalité*).

(3) En déduire qu'on a

$$\int_B x^2\, dxdydz = \int_B y^2\, dxdydz = \int_B z^2\, dxdydz = \frac{1}{3}\, I.$$