Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence SM
Module MAT3

Examen du 21 Juin 2010

Durée : 2h

Sans documents

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule de changement de variables en coordonnées sphériques.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D}$ le domaine $]0,1[\times]0,1[\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^3$, et soit $g = \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}\,.$$

Montrer à l'aide du théorème de Fubini qu'on a

$$I = \int_{\mathcal{D}} g(x,y,t)\,dxdydt\,.$$

(2) Vérifier que pour $(x,y,t) \in \mathcal{D}$ tel que $x \neq y$, on a

$$g(x,y,t) = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2} \right).$$

(3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} g(x,y,t)\,dxdydt = \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}\,.$$

(4) Déterminer les primitives de la fonction $u \mapsto \log u$ (par exemple grâce à une intégration par parties), puis calculer l'intégrale $\int_0^1 (\log(1+x) - \log x)\,dx$.

(5) Calculer I.

Exercice 2. Pour $a, b, c > 0$, on pose

$$\mathcal{E}(a,b,c) = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

(1) Calculer le volume de $\mathcal{E}(1,1,1)$ en intégrant en coordonnées sphériques.
(2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a,b,c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 3. Soit $R > 0$. On pose

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \text{et}\, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(1) Dessiner le domaine $\mathcal{A}$.
(2) On note G le centre de gravité de $\mathcal{A}$, et (x_G, y_G) ses coordonnées.
  (a) Expliquer sans calcul pourquoi on a $x_G = y_G$.
  (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 4. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{3}\, x^{3/2}$. Calculer la longueur du graphe de f.