Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence SM
Module MAT3

Corrigé de l'examen

Question de cours. Voir le cours.

Exercice 1. (1) (a) En posant $u = \sqrt{y}\,x$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2} = \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\Big[\arctan \mathrm{u}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\,.$$

(b) En posant $v = \sqrt{y}$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \int_0^\infty \frac{2dv}{1+v^2} = \Big[2\arctan \mathrm{v}\Big]_0^\infty = \pi\,.$$

(c) D'après (a) et (b), on a

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)}\,\frac{\pi}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{\pi}{2}\times\pi = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

(2) (a) On a $F(y) = \frac{1}{x^2-1}\left(\log(1+x^2y) - \log(1+y)\right)$, donc

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right) \\ &= \frac{1}{x^2-1}\,\frac{x^2(1+y)-(1+x^2y)}{(1+y)(1+x^2y)} \\ &= \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,. \end{aligned}$$

(b) Par (a) on a

$$\int_0^Y \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \Big[F(y)\Big]_0^Y = \frac{1}{x^2-1}\log\left(\frac{1+x^2Y}{1+Y}\right)$$

pour tout $Y>0$. De plus, $\frac{1+x^2Y}{1+Y}$ tend vers x^2 quand $Y\to\infty$, et donc

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{x^2-1}\,\log(x^2) = 2\,\frac{\log x}{x^2-1}\,.$$

(3) D'après le théorème de Fubini et (2b), on a

$$J = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} \right) dx = \int_0^\infty 2 \, \frac{\log x}{x^2-1} \, dx = 2I\,.$$

Donc $I = \frac{1}{2} J = \frac{\pi^2}{4}$ ·

Exercice 2. (1) Faire le dessin.

(2) Soit α l'angle au sommet du cône : on a $\tan \alpha = \frac{R}{h}$. En notant S le sommet du cône, un point $M = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ appartient au cône si et seulement si $0 \leq z \leq h$ et l'angle $\widehat{OSM}$ est inférieur à α. Comme $\tan \widehat{OSM} = \frac{r}{h-z}$, la deuxième condition s'écrit

$$\frac{r}{h-z} \leq \frac{R}{h}\,,$$

autrement dit $r \leq R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$ ·.

(3) Il s'agissait de *calculer* le volume du cône, et non de se contenter de donner la formule. D'après (2) et comme $dxdydz = rdrd\theta$ en coordonnées cylindriques, le volume du cône est égal à

$$V = \int_0^h \left(\int_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)} rdr \right) dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^h \frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz\,.$$

Comme $\int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz = \left[-\frac{h}{3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^3 \right]_0^h = \frac{h}{3}$, on a donc $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ ·

(4) (a) Le point G est situé sur l'axe Oz car le cône est symétrique par rapport à Oz.

(b) Par (a), les coordonnées de G sont $(0, 0, z_G)$, où z_G est à déterminer. Par définition du centre de gravité, on a

$$z_G = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{C}(R,h)} z \, dxdydz\,,$$

où $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$ est le volume du cône. En intégrant en coordonnées cylindriques et en utilisant (2), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}(R,h)} z\,dxdydz &= \int_0^h z \int_0^{R\left(1-\frac{z}{h}\right)} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \pi R^2 \int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz \\
&= \pi R^2 \int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz \\
&= \pi R^2 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{3} + \frac{h^2}{4}\right) \\
&= \frac{\pi R^2 h^2}{12}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $z_G = \frac{3}{\pi R^2 h} \times \frac{\pi R^2 h^2}{12} = \frac{1}{4}\,h$.

Exercice 3. (1) En coordonnées sphériques $(x, y, z) = (r\sin\phi\,\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$, on a $dxdydz = r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta$ et $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \times r^2 \sin\phi\,drd\phi d\theta \\
&= 2\pi \int_0^\pi \sin\phi\,d\phi \int_0^1 r^4 dr \\
&= 2\pi \times [-\cos\phi]_0^\pi \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{5}\,.
\end{aligned}$$

(2) Si on pose $\Phi(x, y, z) = (y, z, x)$, alors Φ est un difféomorphisme (linéaire) de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$, et

$$J_\Phi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\,.$$

D'après la formule de changement de variables, on a donc

$$\begin{aligned}\int_B f(y,z,x)\,dxdydz &= \int_B f(\Phi(x,y,z))\,|J_\Phi(x,y,z)|\,dxdydz\\ &= \int_{\Phi(B)} f(x,y,z)\,dxdydz\\ &= \int_B f(x,y,z)\,dxdydz\end{aligned}$$

où la dernière ligne vient du fait que la boule B est invariante par Φ. La deuxième égalité se démontre de la même manière.

(3) En appliquant (2) avec $f(x,y,z)=x^2$, on obtient

$$\int_B x^2\,dxdydz = \int_B y^2\,dxdydz = \int_B z^2\,dxdydz\,.$$

Comme la somme des 3 intégrales vaut I, ces intégrales valent donc chacune $\frac{1}{3}\,I$.