Feuille d'exercices n° 7

(mesures, dualité des L^p)

Exercices "de cours"

Exercice 1. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$. Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables et si on pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\mu(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$ tend vers $\mu(A)$ quand $n \to \infty$. Quel est le résultat correspondant pour une suite décroissante (A_n)?

Exercice 2. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) μ est positive;

(ii) $\|\mu\| = \mu(\Omega)$.

(2) On suppose que Ω est un espace métrique compact et que $\mathfrak{A}$ est la tribu borélienne. On veut montrer que μ est positive si et seulement si la propriété suivant est vérifiée :

(iii) $\int_K \phi\, d\mu \geq 0$ pour toute fonction positive $\phi \in \mathcal{C}(\Omega)$.

(a) On suppose que (iii) est vérifiée. Montrer qu'on a $\int_\Omega f d\mu \in \mathbb{R}$ pour toute fonction réelle $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, et en déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, il existe une constante ω de module 1 telle que $\left|\int_\Omega f d\mu\right| = \int_\Omega \mathrm{Re}(\omega f) d\mu$.

(b) Montrer que si (iii) est vérifiée, alors $\left|\int_\Omega f d\mu\right| \leq \|f\|_\infty \times \mu(\Omega)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

(c) Conclure.

Exercice 3. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et soit ν la mesure de décompte.

(1) Montrer que μ est absolument continue par rapport à ν.

(2) Peut-on trouver une fonction mesurable f telle que $\mu = f \cdot \nu$?

Exercice 4. Soit Ω un ensemble à 2 éléments, $\Omega = \{a, b\}$.

(1) Montrer qu'on définit une mesure (positive) sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1$, et $\mu(\{b\}) = \mu(\Omega) = \infty$.

(2) Montrer qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dans $L^1(\mu)$ si et seulement si $f(b) = 0$; et que toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dans $L^\infty(\mu)$.

(3) Est-il vrai que que le dual de $L^1(\mu)$ est isomorphe à $L^\infty(\mu)$?

Exercice 5. Soit (Ω, μ) un espace mesuré, avec μ sigma-finie, et soit $p \in [1, \infty[$. On note q l'exposant conjugué de p.

(1) Soit f une fonction mesurable positive sur Ω. On suppose que $f \notin L^p(\mu)$.
  (a) Soit $C \in]0, \infty[$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ tel que $\mu(A) < \infty$ et $\int_A f^p d\mu > C$.
  (b) Montrer que pour tout $C > 0$, il existe une fonction positive $g \in L^q(\mu)$ telle que $\|g\|_q \leq 1$ et $\int_\Omega f g \, d\mu > C$.

(2) Montrer que pour toute fonction mesurable positive f sur Ω, on a

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int f g \, d\mu ; \ g \geq 0, g \in L^q(\mu), \|g\|_q \leq 1 \right\}.$$

(3) Montrer que ce résultat est encore vrai pour $p = \infty$.

Exercice 6. (inégalité de Minkowski généralisée)
Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés σ-finis, et soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : X \times Y \to [0, \infty]$, on a

$$\left(\int_X \left[\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right]^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X f(x,y)^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) \, .$$

(*Utiliser l'exercice 5)*).

Exercice 7. Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est surjectif;
(ii) il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall y^* \in Y^* \ : \ ||T^*(y^*)|| \geq c \, ||y^*||$;

(*Voir la Feuille 5!!*).

Exercices “courts”

Exercice 8. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures complexes sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty |\mu_n|(\Omega) < \infty$. Montrer qu'on définit une mesure complexe sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ en posant $\mu(A) = \sum_0^\infty \mu_n(A)$.

Exercice 9. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures complexes sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$. Montrer qu'il existe une mesure positive finie μ sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que toutes les μ_n sont absolument continues par rapport à μ.

Exercice 10. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(1) On suppose qu'il existe une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 \leq f_n \leq 1$ et $\int_\Omega f_n d\mu_1 + \int_\Omega (1-f_n) d\mu_2 \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que μ_1 et μ_2 sont étrangères. (*Poser* $A = \{t \in \Omega;\ \sum_0^\infty f_n(t) = \infty\}$, *et montrer que* $\mu_1(A) = 0 = \mu_2(\Omega \setminus A)$).

(2) On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $0 \leq f \leq 1$. Montrer que μ_1 et μ_2 sont étrangères si et seulement si

$$\inf_{f\in\mathcal{B}} \left(\int_\Omega f\, d\mu_1 + \int_\Omega (1-f)\, d\mu_2 \right) = 0\,.$$

(3) On suppose que Ω est un espace métrique compact et que $\mathfrak{A}$ est la tribu borélienne. Montrer que dans (2), on peut remplacer $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}(\Omega)$.

Exercice 11. (mesures de Rajchman)
Si μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$, on définit ses coefficients de Fourier par $\widehat{\mu}(n) = \int_\mathbb{T} z^{-n} d\mu(z)$. On dit que μ est une **mesure de Rajchman** si on a $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$.

(1) Montrer que si m est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, alors les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^1(m)$.

(2) Déduire de (1) que si m est une mesure de Rajchman positive, alors toute mesure complexe absolument continue par rapport à m est de Rajchman.

(3) Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T}$. On suppose qu'on a $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$.
   (a) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in L^1(|\mu|)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\varphi\mu}(n) = 0$. (*Commencer par le cas où* φ *est un polynôme trigonométrique*). En déduire que $\widehat{|\mu|}(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que μ est de Rajchman.

Exercice 12. (opérateurs commutant avec les translations)
Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $\tau_\alpha f$ la fonction définie par $\tau_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$. Soit $p \in [1, \infty[$. On dit qu'un opérateur borné $T = L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ **commute avec les translations** si on a $T\tau_\alpha = \tau_\alpha T$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$, où q est l'exposant conjugué de p. Montrer que l'opérateur $T_\varphi : L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ défini par $T_\varphi(f) = \varphi * f$ commute avec les translations.

(2) Soit $T : L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ un opérateur commutant avec les translations.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^p \,:\, Tf(0) = \int_\mathbb{R} f(y)\varphi(-y)\, dy\,.$$

   (b) Montrer que $T = T_\varphi$.

Exercice 13. (convolution L^1-L^p)
Soit φ une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $p \in]1, \infty[$. Montrer que si f est une fonction positive dans $L^p(\mathbb{R})$, alors $\varphi * f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p$. (*Utiliser l'exercice 6*).

Exercice 14. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus I$, on note $\varphi_a \in \mathcal{C}(I)$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{a-t}$.

(1) Soit μ une mesure complexe sur I. Montrer que si $|a|$ est assez grand, on peut écrire $\int_I \varphi_a \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{-n}$, où les coefficients c_n sont indépendants de a et à déterminer.
(2) Montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions φ_a, $a \in \mathbb{C} \setminus I$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$.

Exercice 15. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|} d\mu(t) < \infty$. Soit également $p \in [1, \infty[$.

(1) Montrer que $L^p(\mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales.
(2) Soit $q \in]1, \infty]$. Montrer que si $f \in L^q(\mu)$, alors la formule
$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} f(t) \, d\mu(t)$$
définit une fonction holomorphe dans la bande $\{|\mathrm{Re}(z)| < \alpha/p\}$, et donner l'expression de $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Soit σ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on a
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) \, d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \widehat{\sigma}(t) \, dt \,,$$
où on a posé $\widehat{\sigma}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} d\sigma(x)$. En déduire que si $\widehat{\sigma} = 0$, alors $\sigma = 0$.
(4) Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $L^p(\mu)$.

Exercice 16. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_\alpha :]0, 1[\to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(t) = t^{-\alpha}$. D'autre part, on fixe $p \in [1, \infty[$, et on note q l'exposant conjugué.

(1) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à $L^p(]0, 1[)$?
(2) Soit $g \in L^q(]0, 1[)$.
    (a) Montrer que la formule $G(z) = \int_0^1 g(t) t^{-z} dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) < 1/p\}$.
    (b) Montrer que si $G = 0$, alors $g = 0$. (*Prendre z imaginaire pur et poser $t = e^{-u}$*).
(3) Montrer que $\mathrm{Vect}\{f_\alpha ;\ \alpha < 1/p\}$ est dense dans $L^p(]0, 1[)$.

Exercice 17. Soit (α_n) une suite strictement croissante de réels positifs admettant une limite finie, avec $\alpha_0 = 0$. En adaptant la démarche de l'exercice précédent, montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\alpha_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$

Exercice 18. (densité des fonctions en escaliers)

(1) Soit $q \in [1, \infty]$ et soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On pose $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$, et pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $\Delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\Delta_\varepsilon(t) = \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon}\,.$$

   (a) Montrer qu'on a $\Delta_\varepsilon = p_\varepsilon * f$, où $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[-\varepsilon,0]}$.
   (b) En déduire que Δ_ε tend vers f en norme L^q quand $\varepsilon \to 0$.

(2) Que peut-on dire d'une fonction $f \in L^q(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_I f(t)\, dt = 0$ pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$?

(3) Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 19. (théorème d'extension de Tietze)
Soit K un espace métrique compact, et soit E un fermé de K. Le but de l'exercice est de montrer que toute fonction continue $\phi : E \to \mathbb{C}$ possède un prolongement continu défini sur K tout entier.

(1) On note $R : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(E)$ l'opérateur de restriction, défini par $R(f) = f_{|E}$. Identifier l'opérateur adjoint $R^* : M(E) \to M(K)$.

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant l'exercice 7.

Exercices "pas courts"

Exercice 20. (décomposition de Hahn)
Dans tout l'exercice, μ est une mesure réelle (a priori non positive) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(1) On pose $c = \sup\{\mu(A);\ A \in \mathfrak{A}\}$.
   (a) Montrer que $\forall A, A' \in \mathfrak{A}\ :\ \mu(A \cup A') \geq \mu(A) + \mu(A') - c$.
   (b) On choisit une suite $(A_n) \subset \mathfrak{A}$ telle que $\mu(A_n) \geq c - 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déduire de (a) et de l'exercice 1 qu'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \mu\left(\bigcup_{k>n} A_k\right) \geq c - 2^{-n}\,.$$

   (c) Montrer qu'il existe un ensemble $A^+ \in \mathfrak{A}$ tel que $\mu(A^+) = c$.

(2) Montrer que pour tout $B \in \mathfrak{A}$, on a $\mu(A^+ \cap B) \geq 0$ et $\mu(A^- \cap B) \leq 0$, où on a posé $A^- = \Omega \setminus A^+$.
(3) Déduire de ce qui précède qu'on peut décomposer μ sous la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$, où μ^+ et μ^- sont deux mesures positives (finies) et $\mu^+ \perp \mu^-$.
(4) Redémontrer ce résultat en utilisant le théorème de Radon-Nikodym.
(5) Montrer qu'une telle décomposition est unique.

Exercice 21. (une preuve de Radon-Nikodym)
Dans cet exercice, on donne une démonstration du théorème de Radon-Nikodym pour des mesures positives finies, différente de celle vue en cours. Soient donc μ et ν deux mesures positives finies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{A})$, avec $\mu << \nu$. On veut montrer qu'il existe une fonction mesurable $f \geq 0$ telle que $\mu = f \cdot \nu$.

(1) Soit λ une mesure positive finie sur $(\Omega, \mathfrak{A})$, avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda << \nu$.
  (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la mesure réelle $\lambda_\varepsilon = \lambda - \varepsilon\nu$ n'est pas négative.
  (b) En déduire qu'il existe une ensemble $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ tel que $\nu(A_\varepsilon) > 0$ et $\forall A \subset A_\varepsilon : \lambda(A) \geq \varepsilon\nu(A)$. (*Utiliser l'exercice 20*).
  (c) Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\phi \geq 0$ telle que $\int_\Omega \phi \, d\nu > 0$ et $\phi \cdot \nu \leq \lambda$.
(2) On note $\mathcal{C}$ la famille de toutes les fonctions mesurables positives g vérifiant $g \cdot \nu \leq \mu$.
  (a) Montrer que si $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$, alors $g = \sup(g_1, g_2)$ appartient à $\mathcal{C}$. (*Poser* $A = \{x \in \Omega;\ g_1(x) \geq g_2(x)\}$ *et remarquer qu'on a* $f \cdot \nu = \mathbf{1}_A g_1 \cdot \nu + \mathbf{1}_{(\Omega \setminus A)} g_2 \cdot \nu$).
  (b) En déduire que si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$, alors la fonction $G = \sup_n g_n$ apartient à $\mathcal{C}$.
  (c) On pose $c = \sup \left\{ \int_\Omega g \, d\nu;\ g \in \mathcal{C} \right\}$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}$ telle que $\int_\Omega f \, d\nu = c$.
(3) Démontrer le résultat souhaité. (*Prendre la fonction* f *de (2) et appliquer (1) à* $\lambda = \mu - f \cdot \nu$).

Exercice 22. (critère de Wiener)
Soit μ une mesure complexe sur le cercle $\mathbb{T}$. On définit ses coefficients de Fourier $\widehat{\mu}(n)$ par

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} d\mu(\zeta) \, .$$

(1) Montrer que l'ensemble $A = \{a \in \mathbb{T};\ \mu(\{a\}) \neq 0\}$ est dénombrable.
(2) Montrer qu'on a $\sum_{a \in \mathbb{T}} |\mu(\{a\})|^2 = \mu \otimes \bar{\mu}(\Delta)$, où $\Delta = \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T};\ \zeta = \xi\}$.
(3) Pour $(\zeta, \xi) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, déterminer $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{n} \zeta^{-k} \xi^k$.

(4) Montrer qu'on a

$$\sum_{a\in\mathbb{T}} |\mu(\{a\})|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\mu}(k)|^2 .$$

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que μ soit **continue**, i.e. $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{T}$.

Exercice 23. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.

(i) F est lipschitzienne.

(ii) Il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\, dt .$$

(1) Démontrer l'implication "facile".

(2) On suppose que F est lipschitzienne.

(a) Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\, dx = -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \varphi(x)\, dx .$$

(b) En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \quad : \quad \left| \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\, dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx .$$

(c) Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \;:\; \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\, dt .$$

(3) Démontrer le résultat suivant : si u et v sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = \int_{\mathbb{R}} v\varphi'$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$, alors $u - v$ est constante. (*Commencer par montrer qu'une fonction* $\psi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ *est la dérivée d'une fonction* $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$.).

(4) Montrer que (i) entraîne (ii).

Exercice 24. (caractères de $L^1(\mathbb{R})$)
Un **caractère** de $L^1(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue $\Phi : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, non nulle, telle que

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \quad : \quad \Phi(f * g) = \Phi(f)\Phi(g) .$$

(1) Montrer que si $\xi \in \mathbb{R}$, alors l'application $f \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est un caractère de $L^1(\mathbb{R})$, que l'on note Φ_ξ.

(2) Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$.
  (a) Pourquoi existe-t-il une fonction $\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)g(t)\,dt$ pour toute $f \in L^1$?
  (b) Montrer que pour $f, g \in L^1$, on a $\Phi(f*g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\Phi(\tau_s f)\,ds$, où $\tau_s f(t) = f(t-s)$.
  (c) En déduire que si $f \in L^1$, alors $\Phi(f)\beta(s) = \Phi(\tau_s f)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.
  (d) On suppose que Φ est un caractère. Montrer qu'il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\alpha = \beta$ presque partout et $\alpha(s+s') = \alpha(s)\alpha(s')$ pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que tout caractère de $L^1(\mathbb{R})$ est du type Φ_ξ.

Exercice 25. Soit K un espace métrique compact. Soient également E un fermé de K, et $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathcal{E}^\perp$ l'ensemble des mesures complexes μ sur K vérifiant $\int_K f\,d\mu = 0$ pour toute $f \in \mathcal{E}$, et on suppose qu'on a $|\mu|(E) = 0$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}^\perp$.

(1) Soit $R : \mathcal{E} \to \mathcal{C}(E)$ l'opérateur défini par $R(f) = f_{|E}$. Soit également σ une mesure complexe sur E.
  (a) Montrer qu'il existe une mesure complexe ν sur K telle que $\|\nu\| = \|R^*(\sigma)\|$ et $\int_K f\,d\nu = \int_E f\,d\sigma$ pour toute $f \in \mathcal{E}$.
  (b) Montrer qu'on a $\nu(A) = \sigma(A)$ pour tout borélien $A \subset E$, et en déduire que $\|R^*(\sigma)\| \geq \|\sigma\|$.

(2) Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}(E)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$ telle que $f_{|E} = \phi$. (*Utiliser l'exercice 7*).

Exercice 26. Pour $p \in [1, \infty]$, on pose $L^p = L^p([0, 2\pi])$. Si $f \in L^p$, on note $\widehat{f}(n)$ les coefficients de Fourier de f. Enfin, pour tout ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, on pose $L^1_\Lambda = \{f \in L^1;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour tout } n \notin \Lambda\}$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes (portant sur Λ) :

  (i) $L^1_\Lambda \subset L^2$;
  (ii) Il existe une constante C telle que $\|f\|_2 \leq C\,\|f\|_1$ pour toute $f \in L^1_\Lambda$.
  (iii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$, il existe une fonction $g \in L^\infty$ telle que $\widehat{g}(n) = a_n$ pour tout $n \in \Lambda$.

(1) Montrer que (i) et (ii) sont équivalentes.

(2) On suppose que (ii) est vérifiée. Montrer que si $(a_n)_{n\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$, alors la formule $\Phi(f) = \sum_{n\in\Lambda} a_n \widehat{f}(n)$ a un sens pour toute $f \in L^1_\Lambda$ et définit une forme linéaire continue sur L^1_Λ. En déduire que (iii) est vérifiée.

(3) On suppose que (iii) est vérifiée.
  (a) Soit $\mathcal{P}_\Lambda$ l'ensemble des polynômes trigonométriques appartenant à L^1_Λ. Montrer que $\mathcal{P}_\Lambda$ est dense dans L^1_Λ. (*Utiliser le théorème de Fejér*).

(b) En utilisant (iii) et le théorème de l'application ouverte, montrer qu'il existe une constante C vérifiant la propriété suivante : Pour toute suite $a=(a_n)\in\ell^2(\Lambda)$ et pour tout $P\in\mathcal{P}_\Lambda$, on a $|\sum_{n\in\Lambda}a_n\widehat{P}(n)|\leq C\,\|a\|_{\ell^2(\Lambda)}$.

(c) En déduire que si $P\in\mathcal{P}_\Lambda$, alors $\sum_{n\in\Lambda}|\widehat{P}(n)|^2\leq C^2$.

(d) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 27. (espérance conditionnelle)
Dans tout l'exercice, on ne considère que des fonctions mesurables à valeurs réelles. Soit $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $\mathfrak{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{A}$. On note $L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mathbb{P})$ le sous-espace de $L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$ constitué par les (classes d'équivalence de) fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables.

(1) Montrer que $L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mathbb{P})$ est un sous-espace fermé de $L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$

(2) Soit $f\in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$. On définit une application $\nu_f:\mathfrak{B}\to\mathbb{R}$ en posant $\nu_f(B)=\int_B f\,d\mathbb{P}$ pour tout $B\in\mathfrak{B}$. Montrer que ν est une mesure réelle.

(3) Montrer que pour toute $f\in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$, il existe une unique $g\in L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mathbb{P})$ telle que
$$\forall B\in\mathfrak{B}\ :\ \int_B f\,d\mathbb{P}=\int_B g\,d\mathbb{P}\,.$$
Dans la suite, on notera $g=\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$, ou simplement $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}f$.

(4) Montrer que si $f\in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$ est positive, alors $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$ est également (presque partout) positive. (*Poser* $B=\{t\in\Omega;\ \mathbb{E}_{\mathfrak{B}}f(t)<0\}$). En déduire que pour toute $f\in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$, on a $|\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)|\leq\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(|f|)$ pp.

(5) Montrer que $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}$ est une projection (linéaire) continue de $L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$ sur $L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mathbb{P})$, et qu'on a $\|\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}\|=1$.

(6) On suppose que la tribu $\mathfrak{B}$ est engendrée par une partition finie $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)$ de Ω. Décrire $\mathfrak{B}$ et les éléments de $L^1(\Omega,\mathfrak{B},\mathbb{P})$, puis donner une formule explicite pour $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$.

(7) Soit $(\mathfrak{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{B}$ telle que $\mathfrak{B}_\infty:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{B}_n$ engendre $\mathfrak{A}$.

(a) Montrer que si ν est une mesure réelle sur $(\Omega,\mathfrak{A})$ telle que $\nu(B)=0$ pour tout $B\in\mathfrak{B}_\infty$, alors $\nu=0$. En déduire que $V=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}L^1(\Omega,\mathfrak{B}_n,\mathbb{P})$ est un sous-espace dense de $L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$

(b) Montrer que si $f\in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}_n}(f)\to f$ en norme L^1.

Exercice 28. (opérateurs p-sommants)
Soient K un espace topologique compact, X un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ et Y un espace de Banach réel. Soit également $p\in[1,\infty[$, et soit $C\in\mathbb{R}^+$. On dit qu'un opérateur $T:X\to Y$ est p-**sommant** avec constante C si on a
$$\forall f_1,\dots,f_N\in X\ :\ \sum_{i=1}^N\|T(f_k)\|^p\leq C^p\sup_{t\in K}\sum_{i=1}^N|f_i(t)|^p\,.$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $T : X \to Y$ est p-sommant avec constante C;

(ii) il existe une mesure de probabilité (borélienne) μ sur K tels que

$$\forall f \in X \;:\; \|T(f)\| \leq C \left(\int_K |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p}.$$

(1) Montrer que (ii) entraîne (i).

(2) On suppose que (i) est vérifiée.

(a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de X. Pour $F = \{f_1, \dots, f_N\} \in \mathcal{F}$, on définit une fonction $\Phi_F \in \mathcal{C}(K)$ en posant

$$\Phi_F(t) = \sum_{i=1}^{N} \|T(f_k)\|^p - C^p \sum_{i=1}^{N} |f_i(t)|^p.$$

Enfin, on pose $\mathcal{C} = \{\Phi_F;\; F \in \mathcal{F}\}$ et $\mathcal{D} = \{g \in \mathcal{C}(K);\; g > 0 \text{ sur } K\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des cônes convexes, et que $\mathcal{D}$ est ouvert dans $\mathcal{C}(K)$.

(b) Avecc les notations de (a), montrer qu'il existe une mesure réelle $\nu \neq 0$ sur K telle que

$$\forall F \in \mathcal{F} \;\forall g \in \mathcal{D} \;:\; \int_K \Phi_F \, d\nu \leq 0 \leq \int_K g \, d\nu \,.$$

(c) Montrer que ν est une mesure positive. (*Utiliser l'exercice 2*).

(d) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 29. Dans tout l'exercice, on note m la mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{T}$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *si ν une mesure positive (finie) sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à m, alors les polynômes sont denses dans $L^2(\nu)$.*

(1) Montrer que si λ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}} z^n d\lambda(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lambda = 0$. En déduire que si μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\int_{\mathbb{T}} z^n d\lambda(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $\mu = cm$, pour une certaine constante c.

(2) Soit ν une mesure positive (finie) sur $\mathbb{T}$. On note E le sous-espace fermé de $L^2(\nu)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$, et π_E la projection orthogonale de $L^2(\nu)$ sur E. Enfin, on pose $\phi = \mathbf{1} - \pi_E(\mathbf{1})$.

(a) Montrer que la fonction $z \mapsto z^n \phi(z)$ appartient à E pour tout $n \geq 1$.

(b) En déduire qu'on a $\int_{\mathbb{T}} |\phi(z)|^2 d\nu(z) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

(c) Montrer qu'il existe une constante c telle que $|\phi|^2 \nu = cm$.

(3) Soit ν une mesure positive sur $\mathbb{T}$ singulière par rapport à m.

(a) Avec les notations de (2), montrer que la fonction $\mathbf{1}$ appartient à E.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto z^{-k}$ appartient à E.

(c) Conclure.