Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

(spectre, opérateurs compacts)

Exercices "de cours"

Exercice 1. (théorème de l'image spectrale)
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Montrer que pour tout polynôme P, on a $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert complexe. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$, alors $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda};\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x \in H\ :\ |\langle T(x) - \lambda x, x\rangle| \geq \delta\, \|x\|^2.$$
(2) Déduire de (1) que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les opérateurs $T - \lambda I$ et $(T - \lambda I)^*$ sont injectifs et à image fermée.
(3) Montrer qu'on a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Montrer qu'on a $r(T) < 1$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$.

Exercice 5. Soit X un espace de Banach complexe. Montrer que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$ commutent (i.e vérifient $AB = BA$), alors $r(AB) \leq r(A)r(B)$.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert.

(1) Montrer que pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on a $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
(2) En déduire que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.
(3) Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est normal, alors on a encore $r(T) = \|T\|$. (*Considérer T^*T et utiliser l'exercice 3*).

Exercice 7. (calcul fonctionnel)
Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Montrer que pour tout polynôme P, on a $\|P(T)\| = \sup\{|P(t)|;\ t \in \sigma(T)\}$. (*Utiliser les exercices 1 et 5*).

Exercice 8. Soient $B : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ les opérateurs définis par $B(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_1, x_2 \dots)$ et $S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$.

(1) Déterminer le rayon spectral et les valeurs propres de B.
(2) En déduire le spectre de B.
(3) Trouver un lien entre B et S, et en déduire $\sigma(S)$. L'opérateur $S_{\mathbf{w}}$ possède-t-il des valeurs propres?

Exercice 9. Soit $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on note $M_a : X \to X$ l'opérateur défini par $M_a((x_n)) = (a_n x_n)$. Montrer que M_a est compact si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exercice 10. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $T_K : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$. Montrer que T_K est un opérateur compact.

Exercice 11. Soit Z un espace de Banach, et soit $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés sur Z. On suppose que la suite (π_n) converge simplement sur Z. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de Z.

Exercice 12. Soit Z un espace de Banach.

(1) On suppose qu'il existe une suite d'opérateurs de rangs finis $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(Z)$ telle que $\pi_n(z) \to z$ pour tout $z \in Z$. Montrer que pour tout espace de Banach X, tout opérateur compact $T : X \to Z$ est limite (en norme) d'une suite d'opérateurs de rang fini.
(2) Donner des exemples de tels espaces Z.

Exercice 13. (opérateurs de Hilbert-Schmidt)
Soit H un espace de Hilbert (séparable de dimension infinie), soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \|T(e_i)\|^2 < \infty$ (on dit que T est un opérateur **de Hilbert-Schmidt**).

(1) Pour $N \in \mathbb{N}$, on note π_N la projection orthogonale de H sur $\mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_N\}$. Montrer qu'on a $\|T - T\pi_N\|^2 \leq \sum_{i>N} \|T(e_i)\|^2$.
(2) Montrer que T est compact.

Exercice 14. Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. On pose $m = \inf\{\langle T(x), x\rangle;\ \|x\| = 1\}$ et $M = \sup\{\langle T(x), x\rangle;\ \|x\| = 1\}$.

(1) Soit $S = T - mI$. Montrer que pour tous $x, y \in H$, on a
$$|\langle S(x), y\rangle|^2 \leq \langle S(x), x\rangle \langle S(y), y\rangle .$$
(2) En déduire qu'il existe une suite $(x_n) \subset H$ telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \|S(x_n)\| = 0$.

(3) Montrer que $m \in \sigma(T)$. Puis montrer de même que $M \in \sigma(T)$.

Exercice 15. Soit H un espace de Hilbert (non réduit à $\{0\}$), et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint compact. Montrer que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T. (*Utiliser l'exercice 14*).

Exercice 16. (diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts)
Soit H un espace de Hilbert (séparable), et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact.

(1) Montrer que si $E \subset H$ est un sous-espace stable par T, alors $E^\perp$ est également stable par T.
(2) Montrer que tout sous-espace fermé $F \subset H$ non réduit à $\{0\}$ et stable par T contient un vecteur propre pour T.
(3) Déduire de (1) et (2) que le sous-espace vectoriel de H engendré par les vecteurs propres de T est dense dans H.
(4) Montrer que les sous-espaces propres de T sont deux-à-deux orthogonaux.
(5) Montrer que T est diagonalisable en base orthonormée.

II Exercices "courts"

Exercice 17. Soit X un espace de Banach complexe. Montrer que si R_n est une suite d'opérateurs inversibles sur X convergeant vers un opérateur R et si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|R_n^{-1}\| < \infty$, alors R est inversible. (*Montrer qu'on peut trouver N tel que* $\|I - R_N^{-1}R\| < 1$). En déduire que si (R_n) est une suite d'opérateurs inversibles convergeant vers un opérateur R non-inversible, alors $\lim_{n\to\infty} \|R_n^{-1}\| = +\infty$.

Exercice 18. Soit X un espace de Banach.

(1) Soient $R, S \in \mathcal{B}(X)$ tels que $\|R\|\,\|S\| < 1$. Montrer que $I - RS$ et $I - SR$ sont inversibles et exprimer $(I - SR)^{-1}$ en fonction de R, S et $(I - RS)^{-1}$.
(2) Soient $R, S \in \mathcal{B}(X)$ quelconques. Montrer que $I - RS$ est inversible si et seulement si $I - SR$ est inversible.
(3) Montrer que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$, alors $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$ et $r(AB) = r(BA)$.
(4) A-t-on toujours $\sigma(AB) = \sigma(BA)$?

Exercice 19. Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint. Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ n'est pas surjectif.

Exercice 20. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Soient également X_1 et X_2 deux sous-espaces fermés de X non réduits à $\{0\}$, stables par T et tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Montrer qu'on a $\sigma(T) = \sigma(T_{|X_1}) \cup \sigma(T_{|X_2})$.

Exercice 21. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$ vérifiant $r(T) < 1$. Montrer qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$ tel que $I - T = e^A$. (*Chercher A sous forme d'une série*).

Exercice 22. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On suppose que $\sigma(T) \cap \overline{\mathbb{D}} = \emptyset$. Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\| = +\infty$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 23. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Soit également $\varepsilon > 0$. Pour $x \in X$, on pose

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|T^n(x)\|}{(r(T)+\varepsilon)^n}.$$

(1) Justifier la définition, puis montrer que $\|\cdot\|_\varepsilon$ est une norme équivalente à la norme originelle de X.
(2) On note encore $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme sur $\mathcal{B}(X)$ associée à $\|\cdot\|_\varepsilon$. Montrer qu'on a $\|T\|_\varepsilon \leq r(T) + \varepsilon$.

Exercice 24. Soit X un espace de Banach complexe.

(1) Montrer que l'ensemble $\{(T, \lambda) \in \mathcal{B}(X) \times \mathbb{C};\ \lambda \in \sigma(T)\}$ est une partie fermée de $\mathcal{B}(X) \times \mathbb{C}$.
(2) En déduire que si $(T_n) \subset \mathcal{B}(X)$ converge vers un opérateur T, alors
$$\limsup_{n\to\infty} r(T_n) \leq r(T)\,.$$
(3) Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 25. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$.

(1) On suppose qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(T) = 0$. Montrer que $\sigma(T)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P (noté $Z(P)$), et que si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash Z(P)$, alors on peut trouver un polynôme B_λ tel que $\deg(B_\lambda) < \deg(P)$ et $(T - \lambda I)^{-1} = B_\lambda(T)$.
(2) On suppose que T est une projection, avec $T \neq 0$ et $T \neq I$. Déterminer $\sigma(T)$ et donner une formule pour $(T - \lambda I)^{-1}$ si $\lambda \in \rho(T)$.

Exercice 26. Soit $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres strictement positifs admettant une limite $r_{\mathbf{w}}$ quand $n \to \infty$. On note $B_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur défini par $B_{\mathbf{w}}(x_0, x_1, x_2 \dots) = (w_1x_1, w_2x_2 \dots)$. Montrer que $\sigma(B_{\mathbf{w}})$ est le disque $\overline{D}(0, r_{\mathbf{w}})$. (*Raisonner comme dans l'exercice 8*).

Exercice 27. Soit K un espace métrique compact, et soit $\phi \in \mathcal{C}(K)$. On note $M_\phi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ l'opérateur défini par $M_\phi(f) = \phi f$.

(1) Montrer qu'on a $\sigma(M_\phi) = \phi(K)$.
(2) Montrer qu'un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l'ensemble $\{t \in K;\ \phi(t) = \lambda\}$ est d'intérieur non-vide dans K.

Exercice 28. Soit H l'espace de Hilbert (complexe) $\ell^2(\mathbb{N})$.
(1) Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on note $M_a = H \to H$ l'opérateur défini par $M_a(x_0, x_1, \dots) = (a_0x_0, a_1x_1, \dots)$.
 (a) Déterminer les valeurs propres de M_a.
 (b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $\inf_n |\lambda - a_n| > 0$, alors $M_a - \lambda I$ est inversible.
 (c) Déterminer le spectre de M_a.
(2) Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, il existe un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\sigma(T) = K$.

Exercice 29. Soit $X = \ell^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la "base canonique" de X. Soit également $T \in \mathcal{B}(X)$. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \|T(e_i)\|^q < \infty$, où q est l'exposant conjugué de p. Montrer que T est compact.

Exercice 30. Soient E est un espace métrique compact, X un espace de Banach, et $\Phi : E \to X^*$ une application continue. Pour $x \in X$, on définit une fonction $T_\Phi x \in \mathcal{C}(E)$ en posant $T_\Phi x(t) = \langle \Phi(t), x\rangle$. Montrer que $T_\Phi : X \to \mathcal{C}(E)$ est un opérateur compact.

Exercice 31. Pour $p \in [1, \infty[$, on note $V_p : L^p([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $V_pf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.
(1) Montrer que si $p > 1$, alors V_p est un opérateur compact.
(2) Qu'en est-il pour $p = 1$? (*Considérer les fonctions* $f_n = 2^n \mathbf{1}_{]2^{-n}, 2^{-n+1}]}$).

Exercice 32. Pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on définit une fonction $Tf : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Tf(0) = 0$ et $Tf(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dy$ pour $x > 0$.
(1) Justifier la définition, montrer que Tf est continue pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$, puis montrer que T est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{C}([0,1])$ et calculer $\|T\|$.
(2) Montrer que tout nombre $\lambda \in]0, \pi/2]$ est valeur propre de T, et en déduire le rayon spectral de T. (*Montrer d'abord qu'on peut écrire* $\lambda = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^r d\theta$, *pour un certain* $r \geq 0$).

Exercice 33. (opérateurs de Hankel)
Soient $L^2 = L^2([0, 2\pi])$ et $H^2 = \{f \in L^2;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour tout } n < 0\}$. Pour $\phi \in L^\infty([0, 2\pi])$, on définit un opérateur $T_\phi : L^2 \to L^2$ par

$$H_\phi(f) = (I - \pi_{H^2})(\phi\, \pi_{H^2}(f)),$$

où π_{H^2} est la projection orthogonale de L^2 sur H^2.

(1) Montrer qu'on a $\|H_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ pour toute $\phi \in L^\infty$.
(2) Montrer que si ϕ est continue et si $\phi(2\pi) = \phi(0)$, alors l'opérateur H_ϕ est compact. (*Commmencer par montrer que si ϕ est un polynôme trigonométrique, alors H_ϕ est de rang fini*).

Exercices "pas courts"

Exercice 34. (formule du rayon spectral en dimension finie)
Dans cet exercice, on donne deux démonstrations "élémentaires" de la formule du rayon spectral en dimension finie.

(1) Montrer qu'il suffit d'établir le résultat suivant : *Si $T : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ est un opérateur vérifiant $r(T) < 1$, alors $T^n \to 0$ quand $n \to \infty$.*
(2) (1ère méthode) Soit T un opérateur sur $\mathbb{C}^d$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base $\mathbf{g} = (g_1, \dots g_d)$ de $\mathbb{C}^d$ telle que la matrice $M = (a_{ij})$ de T dans la base $\mathbf{g}$ est triangulaire supérieure, avec de plus $|a_{ij}| < \eta$ pour $i < j$. (*Chercher* $\mathbf{g}$ *sous la forme* $\mathbf{g} = (\alpha_1 f_1, \dots, \alpha_d f_d)$*, où* $(f_1, \dots, f_d)$ *est une base trigonalisant* T).
   (b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\|\ \cdot\ \|_\varepsilon$ sur $\mathbb{C}^d$ telle que $|||T|||_\varepsilon < r(T) + \varepsilon$, où $|||\ \cdot\ |||_\varepsilon$ est la norme associée sur $\mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$.
   (c) Démontrer le résultat souhaité.
(3) (2ème méthode) Soit T un opérateur sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $r(T) < 1$. En utilisant la décomposition "$D + N$", montrer directement que $T^n \to 0$ quand $n \to \infty$

Exercice 35. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, m)$ un espace mesuré σ-fini, et soit $\phi \in L^\infty(m)$. On note $M_\phi : L^2(m) \to L^2(m)$ l'opérateur défini par $M_\phi(f) = \phi f$.

(1) Montrer que M_ϕ est continu et majorer $\|M_\phi\|$.
(2) On pose $\sigma(\phi) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C};\ \forall \varepsilon > 0\ :\ m(\{t;\ |\phi(t) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0\Big\}$.
   (a) Montrer que $\|\phi\|_\infty \in \sigma(\phi)$.
   (b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\phi)$, alors la fonction $1/(\phi - \lambda)$ est bien définie presque partout et appartient à $L^\infty(m)$. En déduire une inclusion entre $\sigma(\phi)$ et $\sigma(M_\phi)$.
   (c) Soit $\lambda \in \sigma(\phi)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble mesurable $E \subset \Omega$ tel que $0 < m(E) < \infty$ et $\int_E |\phi - \lambda|^2 dm \leq \varepsilon^2 m(E)$.
(3) Montrer qu'on a $\sigma(M_\phi) = \sigma(\phi)$ et $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.
(4) Montrer qu'un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l'ensemble $\{t \in \Omega;\ \phi(t) = \lambda\}$ est de mesure non-nulle.

Exercice 36. (spectre d'une isométrie)
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $V : X \to X$ une isométrie (linéaire).

(1) Montrer qu'on a $\sigma_p(V) \subset \mathbb{T}$ et $\sigma(V) \subset \overline{\mathbb{D}}$.
(2) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Montrer qu'on a $\lambda \in \rho(V)$ si et seulement si $V - \lambda I$ est surjectif.
(3) Montrer que $\rho(V) \cap \mathbb{D}$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{D}$. (*Pour "fermé", utiliser l'exercice17*).
(4) Établir les propriétés suivantes :
   (i) Ou bien $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$, ou bien $\sigma(V) \subset \mathbb{T}$.
   (ii) $\sigma(V) \subset \mathbb{T}$ si et seulement si V est bijective.

Exercice 37. (stabilité du spectre)
Dans tout l'exercice, X est un espace de Banach complexe.

(1) Montrer que si $A \in \mathcal{B}(X)$ et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $r((A - \lambda I)^{-1}) = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}$.
(2) Montrer que si $A \in \mathcal{B}(X)$, on a $|\lambda| - r(A) \leq d(\lambda, \sigma(A))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
(3) En utilisant l'exercice 3, déduire de (1) et (2) que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$ commutent, alors $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ et $|r(A) - r(B)| \leq r(A - B)$.
(4) En raisonnant de la même manière, montrer par l'absurde que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$ commutent, alors
$$\forall \lambda \in \sigma(B) : \ d(\lambda, \sigma(A)) \leq r(A - B)\,.$$
(5) Soit $(T_n) \subset \mathcal{B}(X)$ une suite convergeant vers un opérateur T. On suppose que tous les T_n commutent avec T.
   (a) Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} r(T_n) = r(T)$.
   (b) Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $d(\lambda, \sigma(T_n)) \to 0$.

Exercice 38. (valeurs propres approchées)
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. On dit qu'un nombre complexe λ est une **valeur propre approchée** de T s'il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - \lambda x_n\| = 0$. On note $\sigma_{ap}(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de T.

(1) Montrer qu'un nombre complexe λ n'est *pas* valeur propre approchée de T si et seulement si $T - \lambda I$ est injectif et à image fermé. En particulier, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.
(2) On suppose que X est un espace de Hilbert. Montrer qu'on a $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \{\bar{\lambda};\ \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.
(3) Montrer qu'on a $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. (*Partir de $\lambda \in \partial\sigma(T)$ et appliquer l'exercice 17 avec $R = T - \lambda I$*).
(4) Montrer que dans les deux cas suivants, on a $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$:
   (i) T est compact;
   (ii) X est un espace de Hilbert et T est normal.

Exercice 39. (image numérique)
Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On pose
$$V(T) = \{\langle T(x), x\rangle;\ x \in H\,,\ \|x\| = 1\}\,.$$

(1) En utilisant l'exercice 38, montrer qu'on a $\sigma(T) \subset \overline{V(T)}$.
(2) On suppose que H est de dimension finie et que T est diagonalisable en base orthonormée. Montrer que $V(T)$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$.
(3) On revient au cas général. Déduire de (1) qu'on a
$$r(T) \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle| \leq \|T\|\,.$$
(4) Montrer que si T est normal, alors $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle|$.

Exercice 40. (inverses à gauche et à droite)
Dans tout l'exercice, X un espace de Banach complexe.

(1) Montrer que pour un opérateur $R \in \mathcal{B}(X)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
  (i) R est injectif et à image fermée;
  (ii) R possède un inverse à gauche dans $\mathcal{B}(X)$; autrement dit, il existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $SR = I$;
(2) Pour $R \in \mathcal{B}(X)$, laquelle des deux propriétés suivantes implique l'autre?
  (i) R est surjectif;
  (ii) R possède un inverse à droite dans $\mathcal{B}(X)$.
  Montrer que si $\ker(R)$ possède un supplémentaire fermé dans X, alors (i) et (ii) sont équivalentes.
(3) Soit $R \in \mathcal{B}(X)$. On suppose que R possède un inverse à gauche S dans $\mathcal{B}(X)$. Montrer que si $R' \in \mathcal{B}(X)$ est suffisamment proche de R, alors R' possède un inverse à gauche S' vérifiant $\|S'\| \leq 2\|S\|$. (*Commencer par montrer que si R' est proche de R, alors SR' est inversible*).
(4) Soit $T \in \mathcal{B}(X)$, et soit $\lambda \in \partial\sigma(T)$. En utilisant (3) et l'exercice 17, montrer que $T - \lambda I$ ne possède pas d'inverse à gauche et pas d'inverse à droite dans $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 41. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H, et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \|f_i - e_i\|^2 < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que (f_i) est également une base orthonormale de H.

(1) Pour $x = \sum_i x_i e_i \in H$, on pose $T(x) = \sum_0^\infty x_i(e_i - f_i)$. Justifier la définition et montrer que $T \in \mathcal{B}(H)$.
(2) Montrer que T est un opérateur compact. (*Voir l'exercice 13*).
(3) Déterminer $\ker(I - T)$, puis montrer que $R = I - T$ est inversible.
(4) Calculer $R(e_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$, et conclure.

Exercice 42. (opérateurs à noyau 1)

(1) Soit $K : [0,1] \times [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $K_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $K_x(y) = K(x,y)$ est intégrable, et que l'application $x \mapsto K_x$ est continue de $[0,1]$ dans $L^1([0,1])$. Pour $f \in L^\infty([0,1])$, on définit $T_K f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy\,.$$
  (a) Justifier la définition, et montrer que $T_K f$ est une fonction continue.
  (b) Montrer que $T_K : L^\infty([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ est un opérateur compact.

(2) Montrer que les hypothèses de (1) sont vérifiées si K est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

(3) Soit $\theta :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\theta(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$, et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\theta(x)} = 0$. Montrer qu'on définit un opérateur compact $T : L^\infty([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ en posant $Tf(0) = 0$ et $Tf(x) = \frac{1}{\theta(x)} \int_0^x f(t)\, dt$ pour $x > 0$.

(4) Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on définit une fonction $Tf : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $Tf(0) = f(0)$ et $Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$ si $x > 0$.
  (a) Montrer que T est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([0,1])$ dans $\mathcal{C}([0,1])$.
  (b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue valant 1 au point 4^{-n}, nulle sur $[0,(1/2)\cdot 4^{-n}]$ et $[(3/2)\cdot 4^{-n},1]$, affine sur $[(1/2)\cdot 4^{-n}, 4^{-n}]$ et $[4^{-n},(3/2)\cdot 4^{-n}]$. Dessiner le graphe de Tf_n, puis celui de $Tf_q - Tf_p$ pour $p < q$.
  (c) L'opérateur T est-il compact?

Exercice 43. (opérateurs à noyau 2)

Soient $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ et $\theta : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues. On définit un opérateur $T_{K,\theta} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ par la formule
$$T_{K,\theta} f(x) = \int_0^{\theta(x)} K(x,y) f(y)\, dy\,.$$

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $x, x' \in [0,1]$, alors
$$|T_{K,\theta} f(x') - T_{K,\theta} f(x)| \leq \|K\|_\infty \, \|f\|_\infty \, |\theta(x') - \theta(x)| + \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)|\, dy\,.$$
En déduire que l'opérateur $T_{K,\theta}$ est compact.

(2) Dans cette question, on prend $\theta(x) = x$.
  (a) Montrer qu'on a $|T^n_{K,\theta} f(x)| \leq \|f\|_\infty \, \|K\|^n_\infty \, \frac{x^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$.
  (b) En déduire que $\sigma(T) = \{0\}$.

(3) Dans cette question, on prend $\theta(x) = 1 - x$ et $K \equiv 1$. Trouver les valeurs propres de $T_{K,\theta}$, puis le spectre de $T_{K,\theta}$.

Exercice 44. Dans tout l'exercice, (K, d) est un espace métrique compact et $\phi : K \to \mathbb{C}$ est une fonction continue. On note $M_\phi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ l'opérateur défini par $M_\phi(f) = \phi f$.

(1) On dit qu'un point $x \in K$ est un **point d'accumulation** de K si tout voisinage de x dans K contient au moins un point différent de x. On note K' l'ensemble des points d'accumulation de K.
  (a) Montrer qu'un point $x \in K$ est dans K' si et seulement si on peut trouver une suite $(x_n) \subset K$ telle que (x_n) converge vers x et $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Déterminer K' lorsque $K = [0, 1] \cup \{2\} \cup \{2 + \frac{1}{k};\ k \in \mathbb{N}^*\}$.
  (c) Montrer que si $x \in K \setminus K'$, alors $\{x\}$ est un ouvert de K. En déduire que pour tout ouvert $V \subset K$ contenant K', l'ensemble $K \setminus V$ est fini.

Le but de la suite de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *l'opérateur M_ϕ est compact si et seulement si $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in K'$.*

(2) On suppose que la fonction ϕ est nulle sur K'.
  (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble fini $F_\varepsilon \subset K$ tel que $|\phi(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in K \setminus F_\varepsilon$.
  (b) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta_\varepsilon := \min\{d(x, y);\ x, y \in F_\varepsilon,\ x \neq y\}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}(K)$ et si $x, y \in K$ vérifient $d(x, y) < \eta_\varepsilon$, alors
$$|\phi f(y) - \phi f(x)| \leq \|f\|_\infty |\phi(y) - \phi(x)| + 2\varepsilon \|f\|_\infty .$$
  (c) Montrer que l'opérateur M_ϕ est compact.

(3) Soit $x \in K'$, et soit $(x_n) \subset K$ convergeant vers x, avec $x_n \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (a) Montrer qu'on peut construire une suite (ε_k) de nombres strictement positifs et une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telles que les boules ouvertes $B(x_{n_k}, \varepsilon_k)$ sont deux à deux disjointes et ne contiennent pas x.
  (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : K \to \mathbb{R}$ par $f_k(z) = 0$ si $d(z, x_{n_k}) \geq \varepsilon_k$ et $f_k(z) = 1 - \frac{1}{\varepsilon_k} d(z, x_{n_k})$ si $d(z, x_{n_k}) < \varepsilon_k$.
    (i) Montrer que les f_k sont continues, calculer $\|f_k\|_\infty$ et montrer que la suite (f_k) converge simplement vers 0.
    (ii) Calculer $f_k(x_{n_k})$, puis montrer que si $\phi(x) \neq 0$, alors $\|\phi f_k\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

(4) Conclure.