Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

(Hahn-Banach)

Exercices "de cours"

Exercice 1. (prolongement par densité)
Soient X un espace vectoriel normé et Y un espace de Banach. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de X, alors toute application linéaire continue $T : V \to Y$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\widetilde{T} : \overline{V} \to Y$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, et soit V un sous-espace vectoriel de H. Montrer directement (sans utiliser Hahn-Banach), que toute forme linéaire continue sur V se prolonge en une forme linéaire continue sur H.

Exercice 3. Soit X un espace vectoriel normé, et soit $E \subset X$ un sous-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe des formes linéaires continues $e_1^*, \dots, e_n^* \in X^*$ telles que $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
(2) Montrer qu'il existe une projection linéaire continue de X sur E, de norme au plus égale à $\sum_{i=1}^n \|e_i^*\| \, \|e_i\|$.

Exercice 4. (adjoint Banachique)
Dans tout l'exercice, X et Y sont des espaces de Banach, et $T : X \to Y$ est une application linéaire continue. Pour toute forme linéaire continue $y^* \in Y^*$, on définit une forme linéaire $T^*(y^*) \in X^*$ par $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Autrement dit :

$$\forall x \in X \ : \ \langle T^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, T(x) \rangle \, .$$

(1) Montrer que l'application $T^* : Y^* \to X^*$ est linéaire continue. On dit que T^* est l'**adjoint** de l'opérateur T.
(2) Montrer qu'on a $\|T^*\| = \|T\|$.
(3) Dans le cas où X et Y sont des espaces de Hilbert, quel rapport y a-t-il entre T^* et l'adjoint hilbertien de T?

Exercice 5. Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Montrer que T^* est injectif si et seulement si $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans Y.

Exercices "courts"

Exercice 6. Soit I un ensemble non vide, et soit $\ell^\infty(I)$ l'espace de toutes les fonctions bornées $f : I \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit également X un espace vectoriel normé réel, et soit V un sous-espace vectoriel de X. Montrer que toute application linéaire continue $T : V \to \ell^\infty(I)$ se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{T} : X \to \ell^\infty(I)$ vérifiant $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Exercice 7. Soit X un espace vectoriel normé et soit E un sous-espace fermé de X. Montrer que pour tout point $x \in X \setminus E$, on peut trouver $x^* \in X^*$ telle que $\|x^*\| = 1$, $x^* \equiv 0$ sur E et $\langle x^*, x\rangle = d(x, E)$.

Exercice 8. Soit X un espace de Banach séparable. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subset X^*$ qui sépare les points de X.

Exercice 9. Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de X linéairement indépendants. Soit également $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une forme linéaire continue $x^* \in X^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \, : \, \langle x^*, x_n\rangle = a_n$.

(ii) Il existe une constante C telle que

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \, : \, \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j \right| \le C \left\| \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \right\| .$$

Exercice 10. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et soit $T : X \to Y$ une application linéaire. On suppose que pour toute $y^* \in Y^*$, l'application $x \mapsto \langle y^*, T(x)\rangle$ est continue.

(1) Pour tout $x \in X$, on note $\Phi_x : Y^* \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\Phi_x(y^*) = \langle y^*, T(x)\rangle$. Montrer que les Φ_x sont continues et que pour tout $y^* \in Y^*$ fixé, on a $\sup_{x\in B_X} |\Phi_x(y^*)| < \infty$.

(2) Montrer que T est continue.

Exercice 11. Soient (E, d) un espace métrique, X un espace vectoriel normé et $f : E \to X$. On suppose que pour toute forme linéaire continue $x^* \in X^*$, l'application $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$ est lipschitzienne. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 12. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to X$ une application continue, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs dans un espace vectoriel normé réel X.

(1) Soit $x^* \in X^*$. Quelle est la dérivée de l'application $t \mapsto \langle x^*, f(t)\rangle$?

(2) Montrer qu'on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \le (b - a) \, \|f'(c)\|$.

(3) Peut-on toujours trouver c tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$?

Exercice 13. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $f : \mathbb{C} \to X$ une fonction holomorphe à valeurs dans X. On suppose qu'on a $\lim_{|z|\to\infty} \|f(z)\| = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 14. Pour $a \in \ell^1(\mathbb{N})$, on note $\Phi_a : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\Phi_a(x) = \sum_0^\infty a_n x_n$.

(1) Montrer que Φ_a est continue et calculer $\|\Phi_a\|$.

(2) On note c le sous-espace de ℓ^∞ constitué par toutes les suites (x_n) admettant une limite (finie) quand $n \to \infty$.

 (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Phi \in (\ell^\infty)^*$ telle que $\forall x \in c\,:\; \Phi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

 (b) Montrer que Φ n'est pas du type Φ_a.

Exercice 15. Soit E un espace localement convexe (réel), et soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

(1) On suppose que $\Phi \neq 0$ et que $H = \ker(\Phi)$ est fermé dans E.

 (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non-nulle $\psi \in E^*$ telle que $\sup\{\psi(x);\; x \in H\} < \infty$. (*Séparer H d'un point $a \in E \setminus H$*).

 (b) Montrer que $H \subset \ker(\psi)$.

(2) Montrer que Φ est continue si et seulement si $\ker(\Phi)$ est fermé dans E.

(3) Montrer que si Φ n'est pas continue, alors $\ker(\Phi)$ est dense dans H.

Exercice 16. Soit X un espace vectoriel normé réel de dimension infinie.

(1) Montrer qu'il existe des formes linéaires non continues sur X. (*Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants dans X, avec $\|e_n\| = 1$. Construire une forme linéaire Φ telle que $\Phi(e_n) = n$ pour tout n.*)

(2) Soit Φ une forme linéaire non continue sur X.

 (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'ensemble $H_\alpha = \{x \in X;\; \Phi(x) = \alpha\}$ est dense dans X.

 (b) En déduire que si $\Psi : X \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire *continue*, alors $\Psi(H_\alpha) = \mathbb{R}$.

(3) Montrer qu'on peut touver deux convexes disjoints $H, H' \subset X$ qui ne peuvent pas être séparés par une forme linéaire continue.

Exercice 17. Soit X un espace vectoriel normé réel, et soient $\phi, \psi \in X^*$. Soit également $\varepsilon > 0$. On suppose qu'on a $|\phi(x)| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in \ker(\psi)$.

(1) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\widetilde{\phi} \in X^*$ telle que $\|\widetilde{\phi}\| \leq \varepsilon$ et $\widetilde{\phi} - \phi$ est proportionnelle à ψ.

(2) On écrit $\widetilde{\phi} - \phi = \lambda\psi$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ vérifie $|1 - |\lambda|| \leq \varepsilon$.

(3) Montrer qu'on a $\|\phi + \psi\| \leq \varepsilon$ ou $\|\phi - \psi\| \leq \varepsilon$. (*Discuter selon le signe de λ*).

Exercice 18. Soit X un espace vectoriel normé réel, et soit $C \subset X$ un convexe fermé.

(1) Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions affines sur C, à valeurs réelles, telles que $\sup_{i\in I} \varphi_i(x) < \infty$ pour tout $x \in C$. Montrer que la fonction $\phi = \sup_{i\in I} \varphi_i$ est convexe.

(2) Soit $\phi : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

(a) Montrer que $K = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} \;:\; \phi(x) \leq t\}$ est un convexe fermé de $X \times \mathbb{R}$.

(b) Soit $x_0 \in C$. Montrer que pour tout $r < \phi(x_0)$, on peut trouver $x^* \in X^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in C \;:\; \langle x^*, x\rangle + \lambda\phi(x) < \langle x^*, x_0\rangle + \lambda r\,.$$

En déduire qu'il existe une fonction affine continue $\varphi_{x_0,r} : C \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{x_0,r} \leq \phi$ et $\varphi_{x_0,r}(x_0) > r$.

(c) Montrer qu'il existe une famille de fonctions affines continues $(\varphi)_{i\in I}$ telle que $\phi = \sup_{i\in I} \varphi_i$.

Exercice 19. (inégalité de Jensen)
Soit J un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et soit $\phi : J \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Soit également $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $f : \Omega \to J$ une fonction mesurable telle que f et $\phi \circ f$ sont intégrables. En utilisant l'exercice 18, montrer qu'on a

$$\phi\left(\int_\Omega f\, d\mathbb{P}\right) \leq \int_\Omega \phi \circ f\, d\mathbb{P}\,.$$

Exercice 20. Soit C une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et si $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction intégrable prenant ses valeurs dans C (presque partout), alors $\int_\Omega f\, d\mathbb{P} \in C$.

Exercice 21. (hyperplans d'appui)
Soit E un espace vectoriel normé réel, et soit $C \subset E$ un convexe fermé. On dit qu'un hyperplan (affine) fermé $H \subset E$ est un **hyperplan d'appui** pour C en un point $a \in \partial C$ si $a \in H$ et si C est entièrement contenu dans l'un des demi-espaces fermés déterminés par H.

(0) Faire un dessin.

(1) Soit $a \in \partial C$. Montrer que C possède un hyperplan d'appui au point a si et seulement si il existe une forme linéaire continue non-nulle : $\Phi \in E^*$ telle que $\Phi(a) \geq \Phi(z)$ pour tout $z \in C$.

(2) On suppose que C est d'intérieur non-vide dans E.

(a) Montrer que $C = \overline{\mathring{C}}$. (*Faire un dessin*).

(b) Montrer que C possède un hyperplan d'appui en tout point $a \in \partial C$. (*Séparer a de $\mathring{C}$*).

Exercice 22. Soit $C = \{z = (z_n)_{\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N});\ \forall n \in \mathbb{N} \,:\, z_n \geq 0\}\,.$

(1) Montrer que C est un convexe fermé d'intérieur vide dans ℓ^1.

(2) Soit $a = (a_n) \in \ell^1$ vérifiant $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que C ne possède pas d'hyperplan d'appui au point a.

Exercice 23. Soit X un espace vectoriel normé, et soit $C \subset X$ un convexe fermé d'intérieur non-vide. Soit également $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Montrer que pour tout point $x_0 \in C$, il existe une forme linéaire continue $x^* \in X^*$ telle que

$$\forall x \in C \,:\, f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle\,.$$

(*Montrer que* $\widetilde{C} = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R};\ t \geq f(x)\}$ *est d'intérieur non-vide dans* $X \times \mathbb{R}$, *puis utiliser l'exercice 21*).

Exercice 24. On note $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions polynômiales. Soient $t_1, \dots, t_d \in [0,1]$ deux à deux distincts, et $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{P};\ \forall j \in \{1, \dots, d\} \,:\, P^{(k_j)}(t_j) = 0\}\,.$$

(1) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $P \in \mathcal{P}$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, K\} \,:\, \|P^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$.

(2) Déduire de (1) que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et pour tous $A, \alpha > 0$, on peut trouver $P \in \mathcal{P}$ vérifiant $\|P\|_\infty \leq 1$, $|P^{(k_j)}(t_j)| > A$ et $\forall i \neq j \,:\, |P^{(k_i)}(t_i)| < \alpha$.

(3) Soit Φ une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0,1])$ vérifiant $\Phi(P) = 0$ pour tout $P \in \mathcal{E}$.

  (a) Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall P \in \mathcal{P} \,:\, \Phi(P) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j P^{(k_j)}(t_j)\,.$$

  (b) En déduire que si $\Phi \neq 0$, alors Φ n'est pas continue. (*Utiliser (2)*).

(4) Montrer que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 25. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On suppose que les e_n sont non-nuls et que $E = \mathrm{Vect}\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X.

(1) Soit $\mathbb{D} = \{\alpha \in \mathbb{C};\ |\alpha| < 1\}$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, la série $\sum \alpha^n \frac{e_n}{\|e_n\|}$ converge dans X. On pose alors

$$f_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{e_n}{\|e_n\|}\,.$$

(2) Montrer que si Φ est une forme linéaire continue sur X, alors on peut écrire $\Phi(f_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, où les c_n sont indépendants de α et à déterminer.

(3) Montrer que l'espace vectoriel engendré par les f_α est dense dans X.
(4) Plus généralement, montrer que si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ deux à deux distincts convergeant vers un point $\alpha \in \mathbb{D}$, alors l'espace vectoriel engendré par les f_{α_k} est dense dans X.

Exercice 26. Soit $p \in [1,\infty[$, et soit $\mathbb{D} = \{\alpha \in \mathbb{C};\ |\alpha| < 1\}$. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, on note x_α l'élément de $\ell^p(\mathbb{N})$ défini par $x_\alpha = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{D}$ deux à deux distincts convergeant vers un point $\alpha \in \mathbb{D}$, alors $\mathrm{Vect}\{f_{\alpha_k};\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$. (*utiliser l'exercice 25*).

Exercice 27. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus I$, on note $\varphi_a \in \mathcal{C}(I)$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{a-t}$.
(1) Soit $C = \sup\{|t|;\ t \in I\}$. Pour $|a| > C$, développer $\varphi_a(t)$ en série.
(2) Montrer que si (a_k) est une suite d'éléments de $\mathbb{C}\setminus I$ vérifiant $\lim_{k\to\infty} |a_k| = \infty$, alors $\mathrm{Vect}\{\varphi_{a_k};\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$. (*utiliser l'exercice 25*).

Exercice 28. Soit (α_n) une suite strictement croissante de réels positifs admettant une limite finie, avec $\alpha_0 = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\alpha_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.
(1) Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1])$. Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$, on pose $G_\Phi(z) = L(\mathbf{t}^z)$, où $\mathbf{t}^z$ est la fonction $t \mapsto t^z$ (avec la convention $0^z = 0$). On pose également $G_\Phi(0) = \Phi(\mathbf{1})$.
  (a) Montrer que si $G_\Phi(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\Phi = 0$.
  (b) On note U le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.
    (i) Soit $a \in U$. Pour $t \in [0,1]$, déterminer $\lim_{z\to a} \frac{t^z - t^a}{z-a}$. Montrer ensuite, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que cette limite est uniforme par rapport à $t \in [0,1]$.
    (ii) Montrer que G_Φ est holomorphe sur U.
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 29. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to X$ une fonction holomorphe à valeurs dans un espace de Banach X. Montrer que si $\Lambda \subset \Omega$, possède un point d'accumulation dans Ω, alors $\overline{\mathrm{Vect}}\,\{f(\lambda);\ \lambda \in \Lambda\} = \overline{\mathrm{Vect}}\,\{f(z);\ z \in \Omega\}$.

Exercices "pas courts"

Exercice 30. Dans tout l'exercice, X est un espace localement convexe réel, et K est un compact convexe non vide de X. Enfin, $f : K \to K$ est une application affine continue. Le but de l'exercice est de montrer que f possède un point fixe.

(1) On pose $\Delta = \{(u,u);\ u \in K\}$, et on note G le graphe de f. Montrer que Δ et G sont des compacts convexes de $X \times X$.

(2) Montrer que si Φ est une forme linéaire continue sur $X \times X$, alors on peut trouver $(\phi_1, \phi_2) \in X^* \times X^*$ tel que

$$\forall (u,v) \in X \times X\ :\ \Phi(u,v) = \phi_1(u) + \phi_2(v)\,.$$

(3) On suppose que f ne possède pas de point fixe.

  (a) Montrer qu'il existe deux formes linéaires $\phi_1, \phi_2 \in X^*$ et deux nombres réels $\alpha < \beta$ tels que

$$\forall u, v \in K\ :\ \phi_1(u) + \phi_2(u) \leq \alpha < \beta \leq \phi_1(v) + \phi_2(f(v))$$

  (b) Montrer qu'on a $\phi_2(f^n(x)) - \phi_2(x) \geq n(\beta - \alpha)$ pour tout $x \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) Conclure.

Exercice 31. (théorème de Krein-Milman)
Dans tout l'exercice, X est un espace localement convexe (réel) et K est un compact convexe non-vide de X. On dit qu'un point $x \in K$ est un **point extrémal** de K si x ne peut pas s'écrire comme barycentre de deux points de K différents de x; autrement dit : si $u, v \in K$ et $x \in [u,v]$, alors $u = x$ ou $v = x$. Le but de l'exercice est de montrer que K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

(0) Quels sont les points extrémaux de K lorsque K est un rectangle, un triangle ou un carré dans le plan?

(1) On dit qu'un ensemble $E \subset K$ est une **partie extrémale** de K si $K \setminus E$ est convexe. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties extrémales de K compactes et non-vides. Montrer que $\mathcal{E}$ contient un élément minimal pour l'inclusion.

(2) Déduire de (1) que K possède au moins un point extrémal.

(3) Soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur X. On pose

$$K_\phi = \left\{ x \in K;\ \phi(x) = \sup_K \phi \right\}.$$

Montrer que K_ϕ est un compact convexe non-vide, et que tout point extrémal de K_ϕ est un point extrémal de K.

(4) Soit K_0 un compact convexe de K, avec $K_0 \neq K$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\phi \in X^*$ telle que $K_\phi \cap K_0 = \emptyset$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 32. Soient X un espace vectoriel normé réel et K un compact convexe de X. Soient également $f : K \to \mathbb{R}$ et $g : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f est convexe, que g est concave, et qu'on a $g(x) < f(x)$ pour tout $x \in K$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction affine continue $\phi : K \to \mathbb{R}$ telle que $g < \phi < f$.

(0) Faire un dessin.
(1) On pose $C_f = \{(x,\lambda) \in K \times \mathbb{R};\ f(x) \leq \lambda \leq \|f\|_\infty\}$ et $C_g = \{(y,\mu) \in K \times \mathbb{R};\ -\|g\|_\infty \leq \mu \leq g(y)\}$. Montrer que C_f et C_g sont des convexes compacts de $X \times \mathbb{R}$.
(2) Montrer qu'il existe $z^* \in X^*$, $a \in \mathbb{R}$ et une constante c tels que

$$\forall x \in K\ :\ \langle z^*, x\rangle + ag(x) < c < \langle z^*, x\rangle + af(x)\,.$$

(3) Montrer que $a > 0$, puis démontrer le résultat souhaité.

Exercice 33. Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) T est surjectif;
(ii) il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall y^* \in Y^*\ :\ ||T^*(y^*)|| \geq c\,||y^*||$;
(iii) T^* est injectif et à image fermée.

(1) Montrer que (i) entraîne (ii) à l'aide du théorème de l'application ouverte.
(2) Montrer que (ii) et (iii) sont équivalentes.
(3a) On suppose que (2) est vérifiée. En notant B la boule unité de X, montrer que $C = \overline{T(B)}$ contient la boule $\overline{B}(0,c)$. On pourra raisonner par l'absurde en remarquant que C est un convexe fermé de Y et en utilisant la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.
(3b) Soit toujours B la boule unité de X, et soit $\alpha > 0$. On suppose que $\overline{T(\alpha B)}$ contient la boule $\overline{B}(0,1)$. Montrer que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, on peut construire une suite $(x_n) \subset X$ telle que $\|x_n\| \leq \alpha$ et

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} x_i\right)\right\| \leq 2^{-n-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3c) Montrer que (ii) entraîne (i).