Feuille d'exercices n° 4

(Baire)

I Exercices "de cours"

Exercice 1. Utiliser le théorème de Baire pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2. Montrer que tout ouvert d'un espace métrique complet vérifie le théorème de Baire.

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique complet. Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans E. (*Observer qu'on a* $E \setminus \left(\bigcup_n \mathring{F}_n\right) \subset \bigcup_n (F_n \setminus \mathring{F}_n)$).

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert (séparable), et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H. Montrer que pour une suite $(x_n) \subset H$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\langle x_n, x\rangle \to 0$ pour tout $x \in H$;
(ii) la suite (x_n) est bornée, et $\langle x_n, e_i\rangle \to 0$ pour tout $i \in I$.

Exercice 5. Soient X un espace de Banach, Y un e.v.n. et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe deux constantes $C < \infty$ et $k < 1$ telles que la propriété suivante ait lieu : pour tout $y \in B_Y$, il existe $x \in X$ tel que $\|x\| \le C$ et $\|T(x) - y\| \le k$.

(1) Soit $y \in B_Y$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $\|x_n\| \le C$ pour tout n et
$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \left\| \sum_{i=0}^{n} k^i T(x_i) - y \right\| \le k^{n+1} \, .$$
(2) Avec les notations précédentes, montrer que la série $\sum k^i x_i$ converge dans X, et déterminer $T(\sum_0^\infty k^i x_i)$.
(3) Montrer que T est surjective.

Exercice 6. Montrer que l'hypothèse de l'exercice précédent est vérifiée si on suppose que l'adhérence de $T(B_X)$ dans Y contient une boule $B(0, r)$, $r > 0$.

Exercice 7. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le graphe de T est fermé dans $X \times Y$.

(ii) Pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergeant vers 0 telle que la suite $(T(x_n))$ est convergente, on a $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0$.

Exercice 8. Déduire le théorème du graphe fermé du théorème d'isomorphisme de Banach, et vice-versa.

Exercice 9. Soit $J : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{L^1}) \to \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ l'application linéaire définie par $J(f) = f$.

(1) Montrer que le graphe de J est fermé.

(2) J est-elle continue?

II Exercices "courts"

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé.

(1) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E différent de E, alors F est d'intérieur vide dans E.

(2) En déduire que si E est de dimension infinie dénombrable, alors E n'est pas complet.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est complet pour aucune distance compatible avec sa topologie.

Exercice 12. Dans tout l'exercice, (T, d) est un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(T)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur T (à valeurs réelles), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit $I = \{(a,b) \in T \times T;\ a \neq b\}$. Pour $i = (a,b) \in I$, on pose

$$\mathcal{U}_i = \{f \in E;\ f(a) \neq f(b)\}\,.$$

(a) Montrer que les ensembles $\mathcal{U}_i$ sont des ouverts de $\mathcal{C}_b(T)$.

(b) Montrer que tous les ouverts $\mathcal{U}_i$ sont denses dans $\mathcal{C}_b(T)$. (*Regarder par exemple la question (1) de l'exercice 10*).

(2) On suppose que l'espace métrique T est *dénombrable*. Montrer qu'il existe une injection continue de T dans $\mathbb{R}$.

(3) On suppose que l'espace métrique T est de la forme $T = \mathbb{R} \times \Lambda$, où Λ est un espace métrique.

(a) Soit $\phi : T \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $J_\lambda = \phi(\mathbb{R} \times \{\lambda\})$. Montrer que les J_λ sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

(b) Montrer que si Λ est non dénombrable, alors il n'existe pas d'injection continue de T dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une suite croisante (λ_n) de réels positifs tendant vers l'infini et vérifiant $\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}/\lambda_n) = 1$, telle que l'ensemble $A = \{x > 0;\ \lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n x) = 0\}$ est d'intérieur non-vide.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant convenablement le théorème de Baire, montrer qu'il existe un intervalle ouvert (non-vide) $I =]a, b[\subset]0, \infty[$ et un entier N_0 tel que
$$\forall x \in I\ \forall n \geq N_0\ :\ |f(\lambda_n x)| \leq \varepsilon\,.$$

(2) Montrer qu'il existe un entier $N \geq N_0$ tel que $\lambda_{n+1} a < \lambda_n b$ pour tout $n \geq N$, puis montrer que l'ensemble $\bigcup_{n\geq N}]\lambda_n a, \lambda_n b[$ contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$.

(3) Montrer qu'on a $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Exercice 14. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose que f vérifie la propriété suivante : pour tout $z \in \Omega$, il existe un entier $n = n_z$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$. Montrer que f est une fonction polynomiale. (*Poser* $F_n = \{z \in \Omega;\ f^{(n)}(z) = 0\}$).

Exercice 15. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_k = \{z \in \Omega;\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ |f_n(z)| \leq k\}$. Montrer que $\Omega' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathring{F_k}$ est un ouvert dense de Ω.

(2) En utilisant convenablement le théorème de Montel, montrer que f est holomorphe sur Ω'.

Exercice 16. (Banach-Steinhaus sans Baire)
Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème de Banach-Steinhaus qui n'utilise pas le théorème de Baire. Soit donc $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'application linéaires continues d'un espace de Banach X dans un evn Y. On raisonne par l'absurde en supposant qu'on a $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty$ pour tout $x \in X$, mais cependant $\sup_{i\in I} \|T_i\| = \infty$.

(1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $A < \infty$, on peut trouver $x \in X$ et $i \in I$ tels que $\|x\| \leq \alpha$ et $\|T_i(x)\| > A$.

(2) Pour $x \in X$, on pose $C(x) = \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|$. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ et une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :
   (i) $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
   (ii) $\|T_{i_k}(x_n)\| \leq 2^{-n}$ pour tout n et pour tout $k < n$;
   (iii) $\|T_{i_n}(x_n)\| > n + 1 + \sum_{k<n} C(x_k)$ pour tout n.

(3) On pose $x = \sum_{l=0}^{\infty} x_l$. Justifier la définition, puis montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\|T_{i_m}(x)\| > m$.

(4) Conclure.

Exercice 17. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On supose que a vérifie la propriété suivante : pour toute suite $x = (x_n) \in c_0$, la série $\sum a_n x_n$ est convergente.

(1) Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit une forme linéaire $\Phi_N : c_0 \to \mathbb{C}$ par $\Phi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n$. Montrer que Φ_N est continue et calculer $\|\Phi_N\|$.

(2) Montrer que $a \in \ell^1$.

Exercice 18. Soient K un espace topologique compact, X est un espace de Banach et $L : X \to \mathcal{C}(K)$ une application linéaire. On suppose que pour tout $t \in K$, l'application $x \mapsto (Lx)(t)$ est continue. Montrer que L est continue.

Exercice 19. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose que pour tout $y \in H$, l'application $x \mapsto \langle T(x), y\rangle$ est continue. Montrer que T est continue.

Exercice 20. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose qu'on a $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

(1) Soit (z_n) une suite de points de H vérifiant $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. On suppose que la suite $(T(z_n))$ converge vers un point $l \in H$.
   (a) Montrer qu'on a $\langle l, h\rangle + \langle T(h), h\rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$.
   (b) En déduire que $l = 0$. (*Remplacer h par εh, avec $\varepsilon > 0$*).

(2) Montrer que l'application linéaire T est continue.

Exercice 21. Soit X un espace vectoriel normé, et soit $p : X \to X$ une projection linéaire.

(1) Montrer qu'on a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(I - p)$ et $X = \mathrm{Ker(p)} \oplus \mathrm{Im(p)}$.

(2) Montrer que si p est continue, alors $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés dans X.

(3) On suppose que X est un espace de Banach. Montrer que p est continue *si et seulement si* $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés dans X.

Exercice 22. Soit E un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1))$. On suppose que toutes les fonctions $f \in E$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Soit $T : E \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application linéaire définie par $T(f) = f'$. Montrer que T est continue.
(2) On note B_E la boule unité fermée de E. Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que toutes les fonctions de B_E sont C-lipschitziennes.
(3) Montrer que E est de dimension finie. (*Utiliser les théorèmes de Riesz et Ascoli*).

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que la mesure μ est σ-finie, et qu'on a $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$.

(1) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f\|_{L^1} \leq C \|f\|_{L^2}$ pour toute $f \in L^2(\mu)$.
(2) En déduire que la mesure μ est finie.

Exercice 24. Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T : X \to Y$ linéaire continue. On suppose que $\mathrm{Im}(T)$ possède un supplémentaire fermé dans Y, autrement dit qu'il existe un sous-espace fermé $F \subset Y$ tel que $Y = F \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(1) En utilisant convenablement le théorème de l'image ouverte, montrer qu'il existe une constante C telle que la propriété suivante ait lieu : pour tout $y \in \mathrm{Im}(T)$, il existe $x \in X$ tel que $T(x) = y$ *et* $\|x\| \leq C \|y\|$. (*Considérer l'application $L : X \times F \to Y$ définie par $L(f,x) = f + T(x)$.*)
(2) En déduire que toute série normalement convergente à termes dans $\mathrm{Im}(T)$ converge dans $\mathrm{Im}(T)$.
(3) Conclure que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans Y.

Exercice 25. Soit X un espace de Banach séparable. On fixe un ensemble dénombrable $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dense dans la boule unité de X.

(1) On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\ell^1(\mathbb{N})$. Montrer que pour toute suite bornée $(b_n) \subset X$, il existe un opérateur $T : \ell^1 \to X$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ T(e_n) = b_n$.
(2) En déduire, à l'aide de l'exercice 6, qu'il existe une surjection linéaire continue de ℓ^1 sur X.

III Exercices "pas courts"

Exercice 26. (opérateurs hypercycliques)
A Dans cette partie, X est un espace de Banach séparable, et $T : X \to X$ est une application linéaire continue. Pour tout $x \in X$, on pose

$$O(x,T) = \{T^n(x);\ n \in \mathbb{N}\},$$

où $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (n fois), avec la convention $T^0 = I$. On dit qu'un vecteur $x \in X$ est **hypercyclique pour** T si $O(x,T)$ est dense dans X. On note $HC(T)$ l'ensemble des vecteurs hypercycliques pour T, et on dit que l'opérateur T est **hypercyclique** si $HC(T) \neq \emptyset$.

(1) Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules ouvertes $(B_i)_{i\in I}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout ouvert non-vide $V \subset X$, on peut trouver $i \in I$ tel que $B_i \subset V$.

(2) Pour $i \in I$, on pose $G_i = \{x \in X;\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ T^n(x) \in B_i\}$. Montrer que les G_i sont des ouverts de X, et qu'on a $HC(T) = \bigcap_{i\in I} G_i$.

(3) On suppose qu'il existe une partie dense $Z \subset X$ et une application $S : X \to X$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) $T \circ S(x) = x$ pour tout $x \in X$;

(P2) pour tout $z \in Z$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(z) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} S^n(z)$.

(a) Soient $u, v \in Z$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u + S^n(v)$. Quelles sont les limites des suites (x_n) et $(T^n(x_n))$?

(b) Déduire de (a) que la propriété suivante est vérifiée : pour tout couple (U,V) d'ouverts non-vides de X, on peut trouver un point $x \in U$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n(x) \in V$.

(c) En utilisant les questions (2) et (3b), montrer que T est hypercyclique.

B Dans cette partie, on prend $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. Soit $B : X \to X$ l'application linéaire définie de la façon suivante : pour $x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \in X$, on pose $B(x) = (x(1), x(2), \dots)$.

(1) Montrer que B est continue et calculer $\|B\|$.

(2) Montrer qu'il existe une application linéaire $\tilde{B} : X \to X$ vérifiant $B\tilde{B} = I$ et $\|\tilde{B}(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$.

(3) Montrer que l'opérateur $T = 2B$ est hypercyclique. (*Prendre* $Z = c_{00}$ *et appliquer (A3)*).

Exercice 27. Soit (E,d) un espace métrique complet, et soit (f_n) une suite de fonctions continues sur E, à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.

(1) Peut-on affirmer que f est continue? Dans la suite, on notera $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des points de continuité de f.

(2) Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$O_\varepsilon = \{x \in E;\ \exists V \text{ voisinage de } x\ :\ \forall y, z \in V\ |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon\}.$$

Montrer qu'on a $\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} O_{1/p} = \mathrm{Cont}(f)$.

(3) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \{x \in E;\ \forall p, q \geq n\ :\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/3\}.$$

(a) Vérifier que les F_n sont des fermés de E et qu'on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$.
(b) Montrer que $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est contenu dans O_ε.
(c) Conclure que O_ε est dense dans E.
(4) Montrer que $\mathrm{Cont}(f)$ est dense dans E (et est donc en particulier *non-vide*).

Exercice 28. (fonctions continues nulle-part dérivables)
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe "beaucoup" de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0,1]$, mais dérivables en aucun point. Pour tout réel $\lambda > 0$, on posera

$$\mathcal{U}_\lambda = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]);\ \forall x \in [0,1]\ :\ \sup_{y\neq x} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} > \lambda \right\}.$$

Autrement dit:

$$\mathcal{U}_\lambda = \{ f \in \mathcal{C}([0,1]);\ \forall x \in [0,1]\ \exists y\ :\ |f(y)-f(x)| > \lambda |y-x| \}.$$

(1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\mathcal{U}_\lambda$ est un ouvert de $\mathcal{C}([0,1])$.
(2) Soit $\mu > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\phi \in \mathcal{U}_\mu$ telle que $\|\phi\|_\infty < \varepsilon$.
(3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On note k la constante de Lipschitz de f. Soit également $\mu > 0$. Montrer que si $\phi \in \mathcal{U}_\mu$ et si $\mu > k$, alors $f + \phi \in \mathcal{U}_{\mu-k}$.
(4) Déduire de (2) et (3) que pour tout $\lambda > 0$, l'ouvert $\mathcal{U}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.
(5) Montrer que l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 29. (théorème d'Ekeland)
Dans tout l'exercice, X est un espace de Banach réel. On note $\mathrm{Lip}(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : X \to \mathbb{R}$ lipschitziennes bornées. Pour $\varphi \in \mathrm{Lip}(X)$, on pose

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} = \|\varphi\|_\infty + \sup\left\{ \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\|x-y\|}\ ;\ x,y \in X,\ x \neq y \right\}.$$

(1) Montrer que $(\mathrm{Lip}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ est un espace de Banach.
(2) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $b \in \mathrm{Lip}(X)$ vérifiant $b(0) > 0$, $\|b\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon$ et $b(x) = 0$ si $\|x\| \geq \alpha$.
(3) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ bornée inférieurement, et soit $\alpha > 0$. On pose

$$\mathcal{U}_\alpha = \left\{ \varphi \in \mathrm{Lip}(X);\ \exists u \in X\ :\ (f-\varphi)(u) < \inf\{(f-\varphi)(x);\ \|x-u\| \geq \alpha\} \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est un ouvert de $\mathrm{Lip}(X)$.
(b) En utilisant des fonctions du type $x \mapsto b(x-u)$, pour b et u bien choisis, montrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est dense dans $\mathrm{Lip}(X)$.

(4) Soit $g : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement. On suppose qu'il existe une suite $(u_n) \subset X$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$g(u_n) < \inf\big\{g(x);\ \|x - u_n\| \geq 2^{-n}\big\}\ .$$

(a) Montrer par l'absurde que si $p \leq q$, alors $\|u_p - u_q\| < 2^{-p}$.
(b) Montrer que g atteint sa borne inférieure.

(5) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement. Montrer que l'ensemble

$$\{\varphi \in \mathrm{Lip}(X);\ f - \varphi \text{ atteint sa borne inférieure}\}$$

est dense dans $\mathrm{Lip}(X)$.

(6) Démontrer le **théorème d'Ekeland** : *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et bornée inférieurement, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $x_0 \in X$ tel que*

$$\forall x \in X\ :\ \ f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon\|x - x_0\|\ .$$

(7) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ différentiable et bornée inférieurement.
(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $x \in X$ tel que $\|Df(x)\| \leq \varepsilon$.
(b) Peut-on toujours trouver un point x tel que $Df(x) = 0$?

Exercice 30. (procédés de sommation)
Soit Ω un espace topologique, et soit ω_0 un point non isolé de Ω (par exemple, $\Omega = [0,1]$ et $\omega_0 = 1$, ou $\Omega = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et $\omega_0 = \infty$...). On dira qu'une suite (c_j) de fonctions à valeurs complexes définies sur $\Omega_0 := \Omega\setminus\{\omega_0\}$ est un **bon procédé de sommation** si elle vérifie la propriété suivante : pour toute suite numérique (x_j) admettant une limite l, toutes les séries $\sum c_j(\omega)\, x_j$ convergent, et $\lim_{\omega\to\omega_0} \sum_0^\infty c_j(\omega)\, x_j = l$.

(1) On suppose que la suite (c_j) vérifie les conditions suivantes (**conditions de Toeplitz**) :
(a) $\sup\limits_{\omega\in\Omega_0} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j(\omega)| < +\infty$;
(b) $\lim\limits_{\omega\to\omega_0} \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j(\omega) = 1$;
(c) $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\ c_j(\omega) = 0$ pour tout $j \geq 0$.

Montrer que (c_j) est un bon procédé de sommation.

(2) Montrer que (1) permet de retrouver le théorème de Cesàro et le théorème d'Abel sur les séries entières.

(3) Montrer que tout bon procédé de sommation vérifie les conditions (a), (b), (c). (*Pour (a), utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.*)

Exercice 31. (divergence des séries de Fourier)

Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ (à valeurs complexes) muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $S_n f$ la n-ième somme partielle de Fourier de f,

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} \ .$$

Enfin, on pose $L_n(f) = S_n f(0)$.

(1) Montrer que les L_n sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, où D_n est le noyau de Dirichlet : $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$.
Montrer ensuite que $||L_n|| = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\, dt$.

(3) Quelle est la limite de $\|L_n\|$ quand $n \to \infty$?

(4) Déduire de (3) qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0.

(5) Dans cette question, on donne un exemple explicite de fonction dont la série de Fourier diverge en 0.

(a) Pour $u, v > 0$, on pose

$$K(u,v) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(u\theta)\, \sin(v\theta)}{\sin(\theta/2)}\, d\theta \, .$$

Montrer qu'il existe des constantes $a > 0$ et $b < \infty$ telles que

$$\begin{aligned} |K(u,v)| &\leq b\, \log(u) \quad \text{pour} \quad 2 \leq u \leq v, \\ K(u,u) &\geq a\, \log(u) \quad \text{pour tout} \quad u \geq 2. \end{aligned}$$

(b) On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1/2} \sin\left[(2^{k!} + 1/2)|\theta|\right] .$$

(i) Vérifier que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S_{2^{n!}} f(0)$ à l'aide de la fonction K.

(iii) Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Exercice 32. (interpolation de Lagrange)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $x_i^{(n)} = \frac{i}{n}$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Quel est le noyau de l'application linéaire $\Phi : \mathcal{P}_n \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par $\Phi(P) = (P(x_0^{(n)}), \ldots, P(x_n^{(n)}))$?
(b) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$, il existe une unique fonction polynomiale $P \in \mathcal{P}_n$ vérifiant $\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ : \ P(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$. Dans toute la suite ce polynôme sera noté $\pi_n(f)$.
(c) Montrer que π_n est une projection de $\mathcal{C}([0,1])$ sur $\mathcal{P}_n$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit un polynôme $l_i^n \in \mathcal{P}_n$ par

$$l_i^n(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_j^{(n)}} .$$

(a) Vérifier que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $\pi_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i^{(n)}) l_i^{(n)}$.
(b) Montrer que la projection π_n est continue.
(c) On pose $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |l_i^{(n)}(x)|$, et $\Lambda_n = ||\lambda_n||_\infty$. Calculer $||\pi_n||$ en fonction de Λ_n.

(3) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\prod_{j=0}^n |\frac{1}{2} - j| \geq \frac{1}{4}(n-1)!$. En déduire que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a $|l_i^{(n)}(\frac{1}{2n})| \geq \frac{C_n^i}{4n^2}$, puis montrer que $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = +\infty$.

(4) Est-il vrai que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$, la suite $(\pi_n(f))$ converge uniformément vers f?

(5) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||f - \pi_n(f)||_\infty \leq (1 + \Lambda_n) d(f, \mathcal{P}_n)$. (*Montrer d'abord que si* $P \in \mathcal{P}_n$, *alors* $||f - \pi_n(f)||_\infty \leq ||f - P||_\infty + ||\pi_n(f - P)||_\infty$).
(b) On *admet* qu'on a $\Lambda_n \leq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 2$, alors la suite $(\pi_n(f))$ converge uniformément vers f.

Exercice 33. (base de Schauder)
Soit$(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite d'éléments de X. On suppose que pour tout $x \in X$, il existe une unique suite $(x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i e_i$, où la série converge dans X.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une application linéaire $\pi_n : X \to X$ par

$$\pi_n \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i \right) = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i .$$

Montrer que les π_n sont des projections.

(2) Pour $x \in X$, on pose $|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi_n(x)\|$.
(a) Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur X.
(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy pour la norme $|||\cdot|||$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\pi_n(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (au sens de la norme

originelle de X) vers un point $z_n \in X$, et que la suite (z_n) converge vers un point $x \in X$. Montrer ensuite que si $n \leq m$, alors $\pi_n(z_m) = z_n$, puis que $\pi_n(x) = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que l'espace $(X, ||| \cdot |||)$ est complet.

(d) Montrer que $||| \cdot |||$ est équivalente à la norme originelle de X.

(3) Conclure que toutes les projections π_n sont continues, et qu'on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi_n\| < \infty\,.$$

Exercice 34. (non-surjectivité de Fourier)
Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier.

(1) Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on note v_ε la fonction continue valant 1 sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, nulle hors de $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, et affine sur les intervalles $[-1-\varepsilon, -1+\varepsilon]$ et $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

(a) Vérifier qu'on a

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\mathbf{1}_{[-1,1]} * \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\,,$$

puis déterminer $u_\varepsilon := \mathcal{F}v_\varepsilon$. Montrer enfin qu'on a $v_\varepsilon = \mathcal{F}u_\varepsilon$.

(b) Déterminer $\|v_\varepsilon\|_\infty$, et montrer qu'on a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_1 = +\infty$.

(2) Déduire des questions précédentes que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.

(3) Dans cette question, on veut redémontrer le résultat précédent par un argument direct.

(a) Montrer que si f est une fonction impaire intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f}(x) = -2i\int_0^\infty \sin(2\pi t x) f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\int_1^X \frac{\widehat{f}(x)}{x}\,dx$ admet une limite quand $X \to \infty$.

(b) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f}$ est impaire, alors f est impaire.

(c) Donner un exemple explicite de fonction $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans l'image de $\mathcal{F}$.

Exercice 35. (théorème d'extension de Tietze)
Soit (E,d) un espace métrique, et soit K un fermé de E. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *pour toute fonction continue bornée $\varphi : K \to \mathbb{R}$, il existe une fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|K} = \varphi$.*

(1) On note $\mathcal{C}_b(E)$ l'espace des fonctions continues bornées sur E (à valeurs réelles), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on définit de même l'espace $\mathcal{C}_b(K)$. Enfin, on note $R : \mathcal{C}_b(E) \to \mathcal{C}_b(K)$ l'opérateur de restriction, $R(f) = f_{|K}$. Comment s'exprime le résultat à démontrer en termes de l'opérateur R?

(2) Montrer que si K_0 et K_1 sont des fermés de E vérifiant $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, alors il existe une fonction continue $\chi : E \to [0,1]$ telle que $\chi \equiv 0$ sur K_0 et $\chi \equiv 1$ sur K_1.

(3) En déduire que si $\varphi : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une fonction $f : E \to [-1,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \text{ et } \varphi(x) \geq 2/3 \\ 0 & \text{si } x \in K \text{ et } -1/3 \leq \varphi(x) \leq 1/3 \\ -1 & \text{si } x \in K \text{ et } \varphi(x) \leq -2/3 \end{cases}$$

Montrer que si φ est à valeurs dans $[-1,1]$, alors $|f(x) - \varphi(x)| \leq 2/3$ pour tout $x \in K$.

(4) Conclure à l'aide de l'exercice 5.

Exercice 36. Soit (Ω, μ) un espace mesuré, avec μ finie. Soit également E un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$. On suppose que toutes les fonctions de E sont bornées, i.e. $E \subset L^\infty(\mu)$. Le but de l'exercice est de montrer que E est de dimension finie.

(1) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\forall f \in E \, : \, \|f\|_\infty \leq C \, \|f\|_2 \, .$$

(2) En utilisant la majoration $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty \times \|f\|_1$ (*à justifier*), montrer que

$$\forall f \in E \, : \, \|f\|_2 \leq C \, \|f\|_1 \, .$$

(3) Soient $f_1, \ldots, f_N \in E$ deux à deux orthogonales et vérifiant $\|f_i\|_2 = 1$ pour tout i.

(a) En utilisant (1), montrer que si on fixe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \{-1,1\}^N$ alors, pour presque tout $t \in \Omega$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i(t) \right| \leq C\sqrt{N} \, .$$

(b) En déduire que pour presque tout $t \in \Omega$, on a $\sum_{i=1}^{N} |f_i(t)| \leq C\sqrt{N}$.

(c) Montrer qu'on a $N \leq C^4 \mu(\Omega)^2$. (*Intégrer l'inégalité précédente et utiliser (2)*).

(4) Conclure.