Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

(Convolution, Fourier)

I Exercices "de cours"

Exercice 1. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\varepsilon \le (b-a)/2$. Déterminer explicitement la fonction $\phi = \mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$.

Exercice 2. (convolution L^1-L^2)

(1) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right)^2 \le \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|^2 dy\,.$$

(b) En déduire que la fonction $f * g$ est bien définie presque partout et est dans L^2, avec $\|f*g\|_2 \le \|f\|_1\,\|g\|_2$.

(2) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, que peut-on dire de l'opérateur $C_f : L^2 \to L^2$ défini par $C_f(g) = f * g$?

Exercice 3. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$. On suppose que la suite (k_n) vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\int_{\mathbb{R}} k_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|k_n\|_1 < \infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{|t|\ge\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ pour tout $\delta > 0$.

Montrer que (k_n) est une unité approchée pour la convolution. (*Commencer par montrer que si* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée continue en* 0 *telle que* $\varphi(0) = 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)|\varphi(t)\,dt = 0$.

Exercice 4. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de X dans Y. On fait les hypothèses suivantes :

(i) La suite (T_n) est bornée;

(ii) $T_n(z) \to 0$ pour tout $z \in D$, où D est une partie dense de X.

Montrer que $T_n(x) \to 0$ pour tout $x \in X$.

Exercice 5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors $\widehat{\varphi}$ tend vers 0 à l'infini. En déduire, à l'aide de l'exercice **??**, que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ tend vers 0 à l'infini.

Exercice 6. (indicatrices)

(1) Pour $\lambda > 0$, déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}$. Plus généralement, calculer la transformée de Fourier d'une fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$.
(2) Déduire de (1) que la transformée de Fourier de toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 à l'infini.
(3) Déduire de (1) la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 7. (normalisations)

(1) On choisit de définir la transformation de Fourier "sans le 2π", i.e. $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt$. Que deviennent l'identité $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$, la formule d'inversion et la formule de Plancherel?
(2) Mêmes questions lorsqu'on définit la transformée de Fourier "sans le 2π mais en normalisant par $\sqrt{2\pi}$", i.e. $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt$, et le produit de convolution par $f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$.
(3) Calculer dans les deux cas la transformée de Fourier de $g(t) = e^{-t^2/2}$.

Exercice 8. (translations, changements d'échelle)
Soit $p \in \{1, 2\}$ et soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$; et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\tau_\alpha f(t) = f(t-\alpha)$. Montrer que f_λ et $\tau_\alpha f$ appartiennent à L^p, et qu'on a $\widehat{(f_\lambda)} = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}_{1/\lambda}$ et $\widehat{\tau_\alpha f} = e_\alpha \widehat{f}$, où $e_\alpha(x) = e^{-2i\pi\alpha x}$

Exercice 9. (espace de Schwartz)
On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $|f^{(k)}(x)| = o(|x|^{-n})$ quand $|x| \to \infty$, pour tout k et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer qu'on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors les fonctions $f^{(p)}$ et $t \mapsto t^p f(t)$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
(3) Montrer que la transformation de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et est en fait une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 10. (convolution et Fourier sur le cercle)
On note $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et intégrables sur $]-\pi, \pi]$ (ou, si on préfère, l'ensemble des fonctions intégrables sur le cercle $\mathbb{T}$). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$. Si f et g sont deux fonctions périodiques f et g on pose

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\,,$$

chaque fois que cette formule a un sens. Enfin, on note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques (autrement dit, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}$).

(1) Montrer que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{T})$, alors $f * g$ est bien définie presque partout et appartient à $L^1(\mathbb{T})$, avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$. Énoncer d'autres résultats du même type pour l'existence de $f * g$.

(2) Montrer que muni du produit de convolution, $L^1(\mathbb{T})$ est une algèbre commutative. Quel est l'effet de la transformation de Fourier sur le produit de convolution? L'algèbre $L^1(\mathbb{T})$ possède-t-elle une unité?

(3) Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le **noyau de Fejér** d'ordre N par la formule

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\,.$$

(a) Calculer explicitement K_N, et déterminer ses coefficients de Fourier.

(b) Démontrer le théorème de Fejér: *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors $K_N * f \to f$ uniformément quand $N \to \infty$. Et si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, alors $K_N * f \to f$ en norme L^p.*

(c) Démontrer la formule d'inversion de Fourier : *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et si la suite $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\ell^1(\mathbb{Z})$, alors*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} \quad \text{p.p.}$$

II Exercices "courts"

Exercice 11. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit (a, b) un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F_N = \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \tau_{\alpha_{i,N}} f\,,$$

où $\alpha_{i,N} = a + i\frac{b-a}{N}$ et $\tau_\alpha f(x) = f(x - \alpha)$. Montrer que la suite (F_N) converge en norme L^1 vers la fonction $\mathbf{1}_{(a,b)} * f$.

Exercice 12. (idéaux et translations)
Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{E}$ est **invariant par translations**, i.e. $\tau_\alpha f \in \mathcal{E}$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où $\tau_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$

(ii) $\mathcal{E}$ est un **idéal** de $L^1(\mathbb{R})$, i.e. $\varphi * f \in \mathcal{E}$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ et pour toute $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que si $f, \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(\tau_\alpha \varphi) * f = \varphi * (\tau_\alpha f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et en déduire que (ii) entraîne (i).
(2) On suppose que (i) est vérifiée.
  (a) En utilisant l'exercice **??**, montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors $\varphi * f \in \mathcal{E}$ pour toute fonction en escalier φ.
  (b) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 13. (opérateurs commutant avec les translations)
Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $\tau_\alpha f$ la fonction définie par $\tau_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$. On dit qu'un opérateur borné $T = L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ **commute avec les translations** si on a $T\tau_\alpha = \tau_\alpha T$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'opérateur $T_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ défini par $T_\varphi(f) = \varphi * f$ commute avec les translations.
(2) Soit $T : L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ un opérateur commutant avec les translations.
  (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall f \in L^2 \,:\, Tf(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(-y)\, dy\,.$$
  (b) Montrer que $T = T_\varphi$.
(3) Déterminer de même tous les opérateurs $T : L^p(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ commutant avec les translations, pour $p \in [1, \infty[$.

Exercice 14. (Weierstrass par convolution)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$. Montrer que pour tout $\delta \in]0,1]$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n}\int_\delta^1 (1-t^2)^n dt = 0$.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par
$$P_n f(x) = \frac{1}{\alpha_n}\int_{-1}^1 f(x-t)(1-t^2)^n\, dt\,.$$
Montrer que les $P_n f$ sont polynomiales sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et convergent uniformément vers f quand $n \to \infty$.

Exercice 15. (Gaussienne)
Dans cet exercice, on donne deux méthodes pour calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = e^{-\pi t^2}$ (comparer avec la démonstration faite en cours).

(1) Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $\widehat{g}$, et en déduire $\widehat{g}$.
(2) Montrer que la formule $G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tz} e^{-\pi t^2} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Calculer ensuite $G(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$, et en déduire $\widehat{g}$.

Exercice 16. Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable.

(1) Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un "polynôme trigonométrique généralisé", i.e. une fonction de la forme $P(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\alpha_k t}$, où $c_k \in \mathbb{C}$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)P(\lambda t)\, dt$.
(2) Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue T-périodique ($T > 0$), alors
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(\lambda t)\, dt = \frac{1}{T} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt \right) \left(\int_0^T g(t)\, dt \right).$$
(3) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, |\sin(nt)|\, dt$, pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Exercice 17. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(12)} + f^{(8)} + f = g$. Qu'en est-il en général pour une équation différentielle du type $\sum_0^n a_i f^{(i)} = g$?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-t}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = -e^{-t^2}$ si $t < 0$. La transformée de Fourier de f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19. Que peut-on dire d'une fonction $f :\to \mathbb{C}$ continue à support compact dont la transformée de Fourier est également à support compact? (*Considérer la fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(t)\, dt$*).

Exercice 20. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\phi(t) = \frac{1}{t+i}$. Vérifier que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on a $\mathcal{F}\phi(x) = 2\pi e^{-2\pi x} \mathbf{1}_{x>0}$.

Exercice 21. Montrer que la formule $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$ est valable pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in L^2(\mathbb{R})$. (*cf l'exercice* **??**).

Exercice 22. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que $\widehat{g} \in L^\infty$. Montrer que $f * g \in L^2$ et qu'on a $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$. (*Commencer par le cas où $f \in L^1 \cap L^2$, puis montrer via Plancherel que si $(f_n) \subset L^1 \cap L^2$ est une suite convergeant vers f dans L^2, alors $f_n * g$ converge dans L^2*).

Exercice 23. (ondelette)
Dans cet exercice, on définit la transformée de Fourier "sans le 2π". Soit $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$. On définit (presque partout) une fonction $\Gamma : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ par

$$\Gamma(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\Phi}(\xi + 2n\pi)|^2 \,,$$

et on suppose qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b < \infty$ telles que $a \leq \Gamma(\xi) \leq b$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'on définit un isomorphisme $J : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ en posant

$$\widehat{Jf}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sqrt{\Gamma(\xi)}} \,.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\Phi_n(t) = \Phi(t - n)$. Montrer que la famille $(J\Phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$.

III Exercices "pas courts"

Exercice 24. (inégalité de Young)
Soient $p, q, r \in [1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Le but de l'exercice est de montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie presque partout et appartient à L^r, avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

(1) Traiter le cas où $r = 1$.

(2) On suppose que $p = 1$ et $r = q \neq 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \right)^q \leq \|f\|_1^{q-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \, |g(y)|^q dy \,,$$

et en déduire le résultat souhaité.

(3) On suppose $p, q > 1$, et (donc) $r \neq 1$ et $r \neq p, q$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy \right]^r \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r-1}} |g(y)|^{\frac{r-q}{r-1}} dy \right]^{r-1}$$

(b) Montrer que $s = p\frac{r-1}{r-p}$ est supérieur à 1, et calculer l'exposant conjugué.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

(4) D'où vient la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$? (*Remplacer $f(x)$ par $f(x/\lambda)$ et $g(x)$ par $g(x/\lambda)$*).

Exercice 25. Dans tout l'exercice, f et g sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'il est possible d'avoir $f * g = 0$ avec cependant $f \neq 0$ et $g \neq 0$. (*Regarder du côté "Fourier"*). Peut-on avoir $f = g$ dans ce cas?

(2) On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $e^{\varepsilon|t|} f(t)$ et $e^{\varepsilon|t|} g(t)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ se prolongent en des fonctions holomorphes dans une bande $\{|\mathrm{Im}(z)| < c\}$, pour un certain $c > 0$.
   (b) Montrer que si $f * g = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

(3) On suppose que f et g sont à support dans $[0, \infty[$. Montrer que si $f * g = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$. (*Commencer par montrer que si φ est une fonction continue sur le demi-plan fermé $\overline{U} = \{\mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, holomorphe dans U et nulle sur $\mathbb{R}$, alors $\varphi = 0$*).

Exercice 26. (Paley-Wiener)

(1) Soit $a > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-a, a]$. Montrer que la formule
$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\, \varphi(t)\, dt$$
définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et que pour tout entier $n \geq 0$, on a
$$|F(z)| = O\left(|z|^{-n}\, e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$$
quand $|z|$ tend vers l'infini.

(2) Soit F une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 0$, on a $|F(z)| = O\left(|z|^{-n}\, e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini. On veut montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $[-a, a]$, telle que
$$F(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\, \varphi(t)\, dt \; .$$
   (a) Quel est le seul candidat possible pour φ? Montrer que ce candidat est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (b) En utilisant convenablement le théorème de Cauchy, montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a
$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\,(x+ib)}\, F(x+ib)\, dx \; .$$
   (c) Déduire de (b) qu'on a $\varphi(t) = 0$ si $|t| > a$.
   (d) Conclure.

Exercice 27. (caractères de $L^1(\mathbb{R})$)

Un **caractère** de $L^1(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue $\Phi : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, non nulle, telle que
$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \;\; : \;\; \Phi(f * g) = \Phi(f)\Phi(g) \, .$$

(1) Montrer que si $\xi \in \mathbb{R}$, alors l'application $f \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est un caractère de $L^1(\mathbb{R})$, que l'on note Φ_ξ.

(2) Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$.
   (a) Pourquoi existe-t-il une fonction $\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)g(t)\, dt$ pour toute $f \in L^1$?
   (b) Montrer que pour $f, g \in L^1$, on a $\Phi(f*g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\Phi(\tau_s f)\, ds$, où $\tau_s f(t) = f(t-s)$.
   (c) En déduire que si $f \in L^1$, alors $\Phi(f)\beta(s) = \Phi(\tau_s f)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.
   (d) On suppose que Φ est un caractère. Montrer qu'il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\alpha = \beta$ presque partout et $\alpha(s+s') = \alpha(s)\alpha(s')$ pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que tout caractère de $L^1(\mathbb{R})$ est du type Φ_ξ.

Exercice 28. (idéaux de $L^1(\mathbb{T})$)
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera e_n la fonction $t \mapsto e^{int}$ et $\widehat{f}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(1) Soit E une partie de $\mathbb{Z}$. Montrer que $I_E = \{f \in L^1(\mathbb{T});\ \widehat{f}(n) = 0 \ si\ n \in E\}$ est un idéal fermé de $L^1(\mathbb{T})$.

(2) Soit I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{T})$. On pose $E = \{n \in \mathbb{Z};\ \forall f \in I : \widehat{f}(n) = 0\}$.
   (a) Montrer qu'on a $I \subset I_E$.
   (b) Montrer que si $n \in \mathbb{Z}\backslash E$, alors $e_n \in I$. (*Commencer par déterminer $f * e_n$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$*).
   (c) En utilisant le théorème de Fejér, déduire de (b) qu'on a $I_E \subset I$.

(3) Énoncer le théorème obtenu.

Exercice 29. (formule sommatoire de Poisson)

(1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n)$ est absolument convergente, et que la fonction F définie (presque partout) par
$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2\pi n)$$
   est intégrable sur $[0, 2\pi]$.
   (b) Montrer que la fonction F est 2π-périodique, et exprimer ses coefficients de Fourier à l'aide de la transformée de Fourier de f, définie "sans le 2π".
   (c) On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, et qu'on a $|f(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $|t|$ tend vers l'infini. Montrer qu'on peut écrire
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)\,.$$

Cette formule s'appelle la **formule sommatoire de Poisson**.

(2) Pour $s > 0$, on pose $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s n^2}$. Montrer que la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right)$.

Exercice 30. ($A(\mathbb{R})$ et $A(\mathbb{T})$)
Soit $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques dont la série de Fourier est absolument convergente. On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, et on pose $\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Enfin, on note $\mathcal{C}(-\pi, \pi)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues à support contenu dans $]-\pi, \pi[$; et si $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$, on note encore f la fonctions 2π-périodique égale à f sur $[-\pi, \pi]$.

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $e_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction $t \mapsto e^{i\alpha t}$. Pour $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$, exprimer les coefficients de Fourier de $e_\alpha f$ à l'aide de la transformée de Fourier de f, définie "sans le 2π".
(2) Montrer que $A(\mathbb{T})$ est stable par produit, et qu'on a $\|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})}\|g\|_{A(\mathbb{T})}$ pour toutes $f, g \in A(\mathbb{T})$.
(3) Montrer que si $\chi \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\chi \in A(\mathbb{T})$ et $\|\chi\|^2_{A(\mathbb{T})} \leq \|\chi\|^2_\infty + \frac{\pi^2}{3}\|\chi'\|^2_\infty$. En déduire qu'il existe une constante C telle que $\|e_\alpha \chi\|_{A(\mathbb{T})} \leq C$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$.
(4) Soit $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi) \cap A(\mathbb{T})$.
  (a) En utilisant (2) et (3), montrer que $e_\alpha f \in A(\mathbb{T})$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$ et qu'il existe une constante C telle que $\|e_\alpha f\|_{A(\mathbb{T})} \leq C\,\|f\|_{A(\mathbb{T})}$, $\alpha \in [-1, 1]$.
  (b) En déduire, à l'aide de (1), que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(5) Soit $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$. Montrer que si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $e_\alpha f \in A(\mathbb{T})$ pour presque tout $\alpha \in [0, 1]$.
(6) Montrer que pour une fonction $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$, on a l'équivalence $f \in A(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in A(\mathbb{T})$.

Exercice 31. (séries lacunaires nulle part dérivables)
Dans tout l'exercice, $\lambda = (\lambda_n)$ est une suite strictement croissante de réels positifs, et $\alpha = (\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes vérifiant $\sum_0^\infty |\alpha_n| < +\infty$. On définit une fonction $W = W_{\lambda,\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, e^{i\lambda_n t}\ .$$

(1) Montrer que W est bien définie, et continue bornée sur $\mathbb{R}$.
(2) Donner une condition suffisante simple (portant sur λ et α) pour que W soit de classe $\mathcal{C}^1$.
(3) Dans cette question, on suppose que la suite λ est "lacunaire", ce qui signifie qu'il existe une constante $c > 1$ telle que $\lambda_{n+1} \geq c\lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que si $\lambda_n \alpha_n$ ne tend pas vers 0, alors la fonction W n'est dérivable en aucun point.

(a) Montrer que si W est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire
$$W(t) = a + b(t - t_0) + (t - t_0)g(t - t_0) ,$$
où a, b sont des constantes et g est une fonction continue bornée vérifiant $g(0) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe une fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier (définie "sans le 2π") est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $]1/c, c[$, et vérifie $\widehat{\varphi}(1) = 1$.

(c) Calculer $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt$ et $\int_{\mathbb{R}} t\varphi(t)\, dt$ après avoir justifié l'existence de la deuxième intégrale.

(d) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\, \varphi(\lambda_k(t_0 - t))\, dt .$$

(i) Justifier la définition et calculer I_k en fonction de α_k, λ_k et t_0.

(ii) Montrer que si W est dérivable en t_0, alors $I_k = o(1/\lambda_k^2)$ quand k tend vers l'infini.

(e) Conclure.

Exercice 32. (problème de la chaleur "périodique")
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique, le **problème de la chaleur** associé à f, noté $(\mathcal{P})_f$, consiste à trouver une fonction $u : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est 2π-périodique;

(ii) $u(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et y vérifie l'équation de la chaleur
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ;$$

(iii) u est continue sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$;

(iv) $u(0, x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On veut montrer ici que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, le problème $(\mathcal{P})_f$ admet une unique solution.

(1) Pour $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\lambda x} dx$.

(2) Soit $\alpha > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x - 2n\pi)^2} .$$

(a) Justifier la définition, puis montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.

(b) Calculer les coefficients de Fourier de φ.

(3) Pour $t > 0$, on définit $G_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$G_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{inx} \ .$$

(a) En utilisant (2), montrer qu'on a également

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}} \ .$$

(b) Montrer que la famille $(G_t)_{t>0}$ est une unité approchée pour la convolution dans $L^1(\mathbb{T})$.

(4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. On note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f, et on définit $u : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $u(0, x) = f(x)$ et

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{-n^2 t} e^{inx} \text{ pour } t > 0.$$

(a) Justifier la définition, et montrer que pour $t > 0$, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_t(x - y) f(y) \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_t(y) f(x - y) \, dy \ .$$

(b) Montrer que u est solution du problème de la chaleur associé à f.

(5) Soit $v : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (i), (ii) et (iii).

(a) Pour $t \geq 0$, on pose

$$E(t) = \int_0^{2\pi} v(t, x)^2 dx \, .$$

Montrer que la fonction E est décroissante sur $[0, +\infty[$.

(b) En déduire que si $v(0, x) = 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, alors $v = 0$.

(6) Conclure.

Exercice 33. (sous-espaces invariants de $L^2(\mathbb{R})$)
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\tau_\alpha : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur de translation par α, défini par $\tau_\alpha f(t) = f(t - \alpha)$. On dit qu'un sous-espace fermé $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R})$ est **invariant par translation** si on a $\tau_\alpha(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\tau_\alpha f} = e_\alpha \widehat{f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où e_α est la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi\alpha x}$.

(2) Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathcal{E}_A = \{f \in L^2; \ \widehat{f} = 0 \text{ presque partout sur } A\}$$

est un sous-espace fermé de L^2 invariant par translation.

(3) Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de L^2 invariant par translation. On veut montrer que $\mathcal{E}$ est du type $\mathcal{E}_A$, pour un certain ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$.

(a) On note $\pi : L^2 \to \widehat{\mathcal{E}}$ la projection orthogonale de L^2 sur $\widehat{\mathcal{E}} := \{\widehat{f};\ f \in \mathcal{E}\}$.
   (i) Justifier la définition.
   (ii) Montrer que si $f, g \in L^2$, alors $\langle f - \pi(f), e_\alpha \pi(g)\rangle_{L^2} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire qu'on a $f\overline{\pi(g)} = \pi(f)\overline{\pi(g)}$, et finalement $f\overline{\pi(g)} = \overline{g}\pi(f)$ pour toutes $f, g \in L^2$.
   (iii) Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\pi(f)(t) = \varphi(t)f(t)$ p.p. pour toute $f \in L^2$.
   (iv) Montrer qu'on a $\varphi^2 = \varphi$, et donc que φ est une fonction indicatrice.

(b) Conclure.

Exercice 34. (principe d'incertitude)
Dans cet exercice, la transformation de Fourier est définie "avec le 2π". On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz (voir l'exercice **??**).

(1) On définit trois applications linéaires $A, B, C : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par
$$Au = iu' \ ,\ \ Bu(t) = tu(t)\ \ ,\ \ Cu = u\,.$$
Montrer qu'on a $AB - BA = iC$, et que A, B, C sont "autoadjoints" relativement au produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$. En déduire que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\langle Cu, u\rangle_{L^2} = 2\mathrm{Im}\,\langle Bu, Au\rangle_{L^2}$.

(2) Montrer que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors
$$\|tu\|_2\,\|x\widehat{u}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\,\|u\|_2^2\,.$$

(3) Pour quelles fonctions u a-t-on égalité dans l'inégalité précédente?

Exercice 35. (théorème d'échantillonage)
Dans cet exercice, la transformation de Fourier est définie "avec le 2π".

(1) Soit $\mathbb{I}$ l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On pose
$$\widehat{L^2(\mathbb{I})} = \{u \in L^2(\mathbb{R});\ \widehat{u} = 0 \ \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}\}$$
   (a) Montrer que $\widehat{L^2(\mathbb{I})}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si $u \in \widehat{L^2(\mathbb{I})}$, alors "$u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$" et $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$.
   (c) On note sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\mathrm{sinc}\, x = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$, et pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $e_k(x) = \mathrm{sinc}\,(x - k)$.
      (i) Montrer que sinc $\in \widehat{L^2(\mathbb{I})}$ et donner l'expression de $\widehat{\mathrm{sinc}}$.
      (ii) Montrer que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\widehat{L^2(\mathbb{I})}$.

(2) Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que u est **à spectre borné**, ce qui signifie que $\widehat{u}$ est nulle (presque partout) en dehors d'un intervalle $[-c, c]$. Montrer que u

"est" continue et qu'on peut écrire

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(2ck)\, \frac{\sin \pi(\frac{x}{2c} - k)}{\pi(\frac{x}{2c} - k)}\,,$$

où la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et en norme L^2. Montrer également qu'on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u(2ck)|^2\,.$$

Exercice 36. (Hermite et Fourier)

(1) Soit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$. On pose

$$L^2(w) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 w(t)dt < \infty \right\}.$$

Autrement dit $L^2(w) = L^2(\mu)$, où μ est la mesure définie par $d\mu(t) = w(t)dt$.

(a) Montrer que $L^2(w)$ contient toutes les fonctions polynomiales.

(b) Montrer que si $f \in L^2(w)$, alors la formule

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{itz} f(t)\, w(t)dt$$

définit une fonction une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donner une formule pour $F^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Déduire de (b) que les polynômes sont denses dans $L^2(w)$.

(2) On garde les notations de (1).

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$w^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t) w(t)\,,$$

où H_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n. Les polynômes H_n sont les **polynômes d'Hermite**.

(b) Montrer que la suite (H_n) est orthogonale dans $L^2(w)$, et calculer $\|H_n\|_{L^2(w)}$.

(c) Montrer que la suite $(\pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n)$ est une base hilbertienne de $L^2(w)$.

(d) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $w' = -2tw$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme H_n est solution de l'équation différentielle

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0\,.$$

(e) En développant $e^{-(t+z)^2}$ en série entière, montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$G(t,z) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\, \frac{z^n}{n!} = e^{2zt - z^2}\,.$$

(3) Les notations sont celles de (2). On définit les **fonctions d'Hermite** h_n par

$$h_n(t) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} H_n(t) e^{-t^2/2}\,.$$

(a) Montrer que (h_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} G(t,z) e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} G(x, iz)\,.$$

On définit la transformation de Fourier "sans le 2π". Déduire de (b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\widehat{h}_n = \sqrt{2\pi}\, i^n\, h_n\,.$$

Ainsi, (h_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour la transformation de Fourier.

(c) On définit une application linéaire $\mathcal{H} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{H}u(t) = -u''(t) + t^2 u(t)\,.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est un vecteur propre de l'opérateur $\mathcal{H}$, associé à la valeur propre $2n+1$.

(4) Dans cette partie, on utilise ce qui précède pour retrouver le principe d'incertitude démontré dans l'exercice **??**.

(a) Montrer que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} x^2 |\widehat{u}(x)|^2 dx = \langle \mathcal{H}u, u \rangle_{L^2}\,.$$

(b) En déduire qu'on a $\|tu\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\pi}\|x\widehat{u}\|_{L^2}^2 \geq \|u\|_{L^2}^2$ pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) En considérant $u(t/\lambda)$ pour $\lambda > 0$, conclure que pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\|tu\|_2\, \|x\widehat{u}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|u\|_2^2$.

Exercice 37. (transformée de Hilbert)

(1) Montrer que pour toute fonction $f \in L^2$, il existe une unique fonction $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\widehat{Hf}(x) = -i \operatorname{sgn}(x)\, \widehat{f}(x) \quad \text{pp.}$$

On dit que Hf est la **transformée de Hilbert** de f, et l'opérateur $H : L^2 \to L^2$ s'appelle la transformation de Hilbert.

(2) Vérifier que H est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$.

(3) Pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $Q_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$Q_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{\varepsilon^2 + t^2}\,.$$

(a) La fonction Q_ε est-elle dans L^1?

(b) Vérifier que $Q_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on a $\widehat{Q_\varepsilon}(x) = -i \operatorname{sgn}(x)\, e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ pp.

(c) Montrer que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a, au sens L^2 :

$$Hf = \lim_{\varepsilon \to 0} Q_\varepsilon * f\,.$$

(*Il faut d'abord justifier que* $Q_\varepsilon * f \in L^2$*; cf l'exercice* **??**).

(4) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a

$$\int_{|t|>\varepsilon} \frac{\phi(s)}{s}\,ds = \int_{\varepsilon<|s|\leq 1} \frac{\phi(s)-\phi(0)}{s}\,ds + \int_{|s|>1} \frac{\phi(s)}{s}\,ds\,.$$

(b) En déduire que la limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|s|>\varepsilon} \frac{\phi(s)}{s}\,ds$ existe dans $\mathbb{C}$.

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\pi \int_{\mathbb{R}} Q_\varepsilon \phi - \int_{|s|>\varepsilon} \frac{\phi(s)}{s}\,ds = \int_{|t|\leq 1} \frac{s\phi(\varepsilon s)}{1+s^2}\,ds - \int_{|s|>1} \frac{\phi(\varepsilon s)}{s(1+s^2)}\,ds\,.$$

(d) Quelle est la limite du membre de droite quend $\varepsilon \to 0$?

(5) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors on peut écrire

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|s|>\varepsilon} \frac{f(t-s)}{s}\,ds$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.