Feuille d'exercices n° 2

(Hilbert, Stone-Weierstrass, séparabilité)

I Exercices "de cours"

Exercice 1. Soit $(H, \| \cdot \|)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soient $x, y \in H$. Exprimer $\langle x, y\rangle$ en fonction de $\|x+y\|$ et $\|x-y\|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et en fonction de $\|x+y\|$, $\|x-y\|$, $\|x+iy\|$ et $\|x-iy\|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 2. (identité du parallèlogramme généralisée)
Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs quelconques dans un espace préhilbertien $(E, \| \cdot \|)$, alors

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

Exercice 3. (déterminant de Gram)
Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace préhilbertien . Pour $x_1, \ldots, x_p \in E$, on pose

$$G(x_1, \ldots, x_p) = \det\left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1\leq i,j\leq p} .$$

(1) Montrer que $G(x_1, \ldots, x_p)$ est positif, et qu'on a $G(x_1, \ldots, x_p) = 0$ si et seulement si les x_i ne sont pas linéairement indépendants. (*Vérifier que la matrice* $(\langle x_i, x_j\rangle)$ *est positive*).
(2) Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$. Montrer que si $a, b \in E$ sont orthogonaux, alors $G(u_1, \ldots, u_n, a+b) = G(u_1, \ldots, u_n, a) + G(u_1, \ldots, u_n, b)$.
(3) Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$ linéairement indépendants. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$. Montrer que pour tout $x \in E$, la distance de x à F est donnée par

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(u_1, \ldots, u_n, x)}{G(u_1, \ldots, u_n)}} .$$

(*Commencer par le cas où* $x \in F^\perp$).

Exercice 4. (caractérisation des projecteurs orthogonaux)
Soit H un espace de Hilbert réel, et soit $p \in \mathcal{B}(H)$ un **projecteur** ($p^2 = p$) non nul.

(1) Montrer qu'on a $\|p\| \geq 1$.
(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\|p\| = 1$;
(ii) p est un projecteur orthogonal;
(iii) p est auto-adjoint.

(*Pour (i)* $\Longrightarrow$ *(ii), commencer par montrer que si* $x \in \mathrm{Ker}(p)^\perp$ *et* $p(x) \neq x$*, alors* $\|p(x)\| > \|x\|$).

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on a $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle|;\ \|x\|, \|y\| \leq 1\}$.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est auto-adjoint et si $\langle T(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$, alors $T = 0$.

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est une **isométrie** si on a $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. On dit que T est **unitaire** si T est une isométrie bijective.

(1) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
   (i) T est une isométrie;
   (ii) T conserve le produit scalaire;
   (iii) $T^*T = I$.
(2) Montrer que $T \in \mathcal{B}(H)$ est unitaire si et seulement si $T^*T = I = TT^*$; autrement dit, T est inversible et $T^{-1} = T^*$.

Exercice 9. Soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ par $S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$. Vérifier que S est une isométrie non bijective, et déterminer S^*.

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est **positif** si T est auto-adjoint et $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est positif, alors $|\langle T(x), y\rangle|^2 \leq \langle T(x), x\rangle \langle T(y), y\rangle$ pour tous $x, y \in H$. En déduire que $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in H;\ \langle T(x), x\rangle = 0\}$.

Exercice 11. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est dit **normal** si $T^*T = TT^*$. Montrer que T est normal si et seulement si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ pour tout $x \in H$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $\phi \in L^\infty(\mu)$. On définit un opérateur $M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ par $M_\phi(f) = \phi f$. Montrer que M_ϕ est un opérateur normal.

Exercice 13. Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint.

(1) On pose $\lambda = \sup\{\langle T(x), x\rangle;\ \|x\| = 1\}$. Montrer que s'il existe un vecteur $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle T(x_0), x_0\rangle = \lambda$, alors λ_0 est une valeur propre de T. (*Utiliser l'exercice 10*). En déduire que si H est de dimension finie, alors T possède au moins une valeur propre.
(2) Montrer que si E est un sous-espace vectoriel de H stable par T, alors $E^\perp$ est également stable par T.
(3) Montrer que les valeurs propres de T sont réelles et que les sous-espaces propres de T sont deux-à-deux orthogonaux.
(4) On suppose que H est de dimension finie. Déduire des questions précédentes que T est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 14. Soit H un espace de Hilbert *complexe*, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal.

(1) Montrer que si $E \subset H$ est un sous-espace stable par T, alors $E^\perp$ est stable par T^*. Que peut-on dire si E est stable par T^*?
(2) Montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \mathrm{Ker}(T^* - \bar{\lambda} I)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. (*Observer que $T - \lambda I$ est normal*).
(3) Montrer que les sous-espaces propres de T sont deux-à-deux orthogonaux.
(4) On suppose que H est de dimension finie. Déduire des questions précédentes que T est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 15. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour $T \in \mathcal{B}(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est inversible;
(i') T^* est inversible;
(ii) il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geq c\,\|x\|$ et $\|T^*(x)\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in H$.

(*Pour (ii) $\Longrightarrow$ (i), montrer que si (ii) est vérifiée, alors l'image de T est à la fois fermée et dense dans H*).

Exercice 16. Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés. On suppose que les mesures μ et ν sont σ-finies et que les espaces $L^2(\mu)$ et $L^2(\nu)$ sont séparables. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de $L^2(\mu)$ et $(f_j)_{j\in J}$ une base orthonormée de $L^2(\nu)$. Pour $(i,j) \in I \times J$, on définit une fonction $e_i \otimes f_j : X \times Y \to \mathbb{K}$ par $e_i \otimes f_j(x,y) = e_i(x) f_j(y)$. Montrer que la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base orthonormée de $L^2(X \times Y)$.

Exercice 17. Soit H un espace de Hilbert (séparable), et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H. Montrer que (e_i) est une base orthonormale de H *si et seulement si* la formule de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle x, e_i\rangle|^2$ est vérifiée pour tout $x \in H$.

Exercice 18. En considérant la fonction 2π-périodique f définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = t$, calculer la somme $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.

(2) En déduire qu'on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, et que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Exercice 20. (noyau de Poisson)
Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes.

(1) Pour $r \in]0, 1[$, on définit une fonction $P_r \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Justifier la définition, puis calculer explicitement P_r. Établir ensuite les propriétés suivantes :

(i) $P_r \geq 0$;

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = 1$;

(iii) $\lim_{r\to 1} \int_\delta^\pi P_r(t)\, dt = 0 = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t)\, dt$ pour tout $\delta \in]0, \pi[$.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Pour $r \in]0, 1[$, on définit $f_r \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

(a) Justifier la définition, puis montrer qu'on a

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) P_r(s)\, ds.$$

(b) Montrer que $f_r \to f$ uniformément quand $r \to 1$.

(3) Déduire de la question précédente que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Exercice 21. Soit (K, d) un espace métrique compact. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathcal{C}(K)$.

Exercice 22. Montrer que tout espace métrique compact est séparable

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) E est séparable;
(ii) il existe une suite croissante (F_n) de sous-espaces de dimension finie telle que $\bigcup_n F_n$ est dense dans E.

Exercice 24. Soit $c_{00} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

(1) Montrer que c_{00} est dense dans c_0 et dans ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.
(2) En déduire que ces espaces sont séparables.

II Exercices "courts"

Exercice 25. Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel, et soient $x, y \in H$. Développer $\Big\| \|y\|x - \|x\|y \Big\|^2$, et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 26. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in M_d(\mathbb{C})$, alors $|\mathrm{Tr}(A)| \leq \sqrt{d} \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$.

Exercice 27. En utilisant l'exercice 2, montrer que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach isomorphe à un espace de Hilbert, alors il existe des constantes $c > 0$ et $C < \infty$ telles que, pour tous vecteurs $x_1, \dots x_n \in X$, on ait

$$c \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leq C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

En déduire que si $p \neq 2$, alors ℓ^p n'est pas isomorphe à ℓ^2. Montrer de même que $\mathcal{C}([0,1])$ n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert.

Exercice 28. Calculer $\inf \left\{ \int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt;\ a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

Exercice 29. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel, et soit $T : E \to E$. On suppose que $T(0) = 0$ et que T est une isométrie ($\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$).

(1) Montrer que T conserve le produit scalaire ($\forall x, y : \langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$).
(2) En déduire que T est linéaire. (*Développer* $\|T(x+y) - T(x) - T(y)\|^2$).

Exercice 30. (inégalité de Ptolémée)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel.

(1) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $x' = \frac{x}{\|x\|^2}$. Montrer qu'on a $\|x'-y'\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$ pour tous $x, y \in E \setminus \{0\}$.
(2) En déduire que pour tous $a, b, c \in E$, on a
$$\|a\|\,\|b-c\| \leq \|b\|\,\|c-a\| + \|c\|\,\|a-b\|\,.$$

Exercice 31. Soit E un espace préhilbertien *complexe*. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(E)$ vérifie $\forall x \in E\,:\,\langle T(x), x\rangle = 0$, alors $T = 0$. Cela reste-t-il vrai dans le cas réel?

Exercice 32. Soit H un espace de Hilbert, et soit E un sous-espace vectoriel de H. Montrer que toute forme linéaire continue sur E peut se prolonger en une forme linéaire continue sur H.

Exercice 33. Soit H un espace de Hilbert, et soient $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{B}(H)$ des projecteurs orthogonaux. On pose $E_i = \mathrm{Im}(p_i)$. Montrer que $p = p_1 + \dots p_n$ est un projecteur si et seulement si les E_i sont deux-à-deux orthogonaux.

Exercice 34. Soient H et K deux espaces de Hilbert, et soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ deux suites orthonormales. Montrer que si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, alors la formule
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle x, e_n\rangle\, f_n$$
a un sens et définit un opérateur borné $T : H \to K$. Calculer $\|T\|$ et déterminer T^*.

Exercice 35. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur *auto-adjoint*.
(1) On pose $M = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| \leq 1\}$. Montrer qu'on a $|\langle T(u), u\rangle| \leq M\,\|u\|^2$ pour tout $u \in H$.
(2) Montrer qu'on a $\mathrm{Re}\,\langle T(x), y\rangle \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pour tous $x, y \in H$. (*Prendre* $u = x \pm y$). En déduire qu'en fait $|\langle T(x), y\rangle| \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
(3) En remplaçant x par tx et y par y/t dans l'inégalité précédente et en optimisant par rapport à $t > 0$, montrer qu'on a $|\langle T(x), y\rangle| \leq M\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x, y \in H$.
(4) Conclure, à l'aide de l'exercice 5, que $\|T\| = \sup\{|\langle T(x), x\rangle|;\ \|x\| \leq 1\}\,.$

Exercice 36. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est une isométrie, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(I - TT^*)$.

Exercice 37. Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert.

(1) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\langle T(x), x\rangle| \geq c\,\|x\|^2$ pour tout $x \in H$. Montrer que T est inversible. (*Utiliser l'exercice 15*).
(2) Montrer que si $S \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur positif, alors $S + \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda > 0$. Montrer de même que si H est un espace de Hilbert complexe et si $R \in \mathcal{B}(H)$ est auto-adjoint, alors $R + \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice 38. (suites d'opérateurs croissantes majorées)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert.
(1) En utilisant l'exercice 10, montrer que si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur positif, alors $\forall x \in H\,:\, \|T(x)\|^2 \leq \|T\|\,\langle T(x), x\rangle$.
(2) Soit $(S_n) \subset \mathcal{B}(H)$ une suite d'opérateurs auto-adjoints. On suppose que la suite (S_n) est **croissante** ($S_{n+1} - S_n \geq 0$ pour tout n) et bornée.
  (a) Soit $M = \sup_n \|S_n\|$. Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in H$, alors
$$\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|^2 \leq 2M\,\left(\langle S_{n+p}(x), x\rangle - \langle S_n(x), x\rangle\right).$$
  (b) Montrer que la suite (S_n) converge simplement vers un opérateur $S \in \mathcal{B}(H)$.

Exercice 39. Soit (K, d) un espace métrique compact.
(1) Pour $a \in K$, on note $d_a \in \mathcal{C}(K)$ la fonction définie par $d_a(x) = d(x, a)$. Montrer que si D est une partie dense de K, alors la famille $\{d_a;\ a \in D\}$ sépare les points de K. Que peut-on alors dire de la sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ engendrée par $\mathbf{1}$ et les fonctions d_a, $a \in D$?
(2) Montrer que $\mathcal{C}(K)$ est séparable. (*Utiliser l'exercice 22*).

Exercice 40. Soient K et L deux espaces métriques compacts.
(1) Pour $(f, g) \in \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(L)$, on note $f \otimes g : K \times L \to \mathbb{K}$ la fonction définie par $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$. Enfin, on note $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K \times L)$ engendré par les fonctions du type $f \otimes g$. Montrer que $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ est dense dans $\mathcal{C}(K \times L)$.
(2) Déduire de (1) la forme suivante du théorème de Fubini : si μ et ν sont deux mesures boréliennes finies sur K et L respectivement, alors
$$\int_K \left(\int_L F(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_L \left(\int_K F(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$$
pour toute fonction F continue sur $K \times L$.

Exercice 41. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, on définit $\varphi_a \in \mathcal{C}([0, 1])$ par $\varphi_a(t) = \frac{1}{t-a}$. On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1])$ engendré par les fonctions φ_a.

(1) Montrer que si $a \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, alors $\varphi_a^2 \in \overline{\mathcal{A}}$. (*Considérer les fonctions* $f_n = 2^n(\varphi_a - \varphi_{a+2^{-n}})$).
(2) Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 42. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes, considéré comme une partie de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

(1) Soit $P \in \mathcal{P}$. Calculer $\widehat{P}(n)$ pour $n < 0$.
(2) La sous-algèbre $\mathcal{P}$ est-elle dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$?

Exercice 43. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue vérifiant $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 44. (polynômes de Legendre)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme P_n par

$$P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Big((t^2-1)^n\Big)\,.$$

(1) Quel est le degré de P_n?
(2) Montrer que les P_n sont orthogonaux dans $L^2([-1,1])$.
(3) On pose $L_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^{n+\frac{1}{2}}n!}P_n$. Montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([-1,1])$.

Exercice 45. (polynômes de Tchebitchev)

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que

$$\forall x \in [0,\pi] \,:\, \cos(nx) = T_n(\cos x)\,.$$

Quel est le degré de T_n?
(2) Soit μ la mesure positive sur $[-1,1]$ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Montrer que μ est finie et calculer $\mu([-1,1])$.
(3) Montrer que la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathbf{1}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n;\ n \geq 1\right\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mu)$.

Exercice 46. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Montrer qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt\,.$$

Exercice 47. Pour $a > 0$, calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^{ax}$. En déduire la formule

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a\,.$$

Exercice 48. En considérant la fonction f définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^2$, calculer la somme $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$.

Exercice 49. Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt - \left| \int_0^1 f(t)\, dt \right|^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\,.$$

(*Prolonger f en une fonction paire 2-périodique*).

Exercice 50. Soit H l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques vérifiant $\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$. Pour $f \in H$, on pose

$$\|f\|_H^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{n \neq 0} n^2 |\widehat{f}(n)|^2\,.$$

(1) Montrer que si $f \in H$, alors $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_H$, où C est une constante (indépendante de f).
(2) Montrer que H est un espace de Hilbert.

Exercice 51. Soit (E, d) un espace métrique séparable, et soit $A \subset E$. Montrer que l'espace métrique (A, d) est séparable. (*Soit $D \subset E$ dénombrable dense. Pour chaque couple $(z, r) \in D \times \mathbb{Q}$ tel que la boule $B(z, r)$ rencontre A, choisir un point $x_{z,r} \in B(z, r) \cap A$*).

Exercice 52. Montrer que dans un espace métrique séparable, toute famille d'ouverts non vides deux-à-deux disjoints est (finie ou) dénombrable.

Exercice 53. Dans cet exercice, on montre que ℓ^∞ et $L^\infty([0,1])$ ne sont pas séparables.
(1) On considère $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ comme une partie de ℓ^∞.
  (a) Soient $\alpha, \beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, avec $\alpha \neq \beta$. Calculer $\|\alpha - \beta\|_\infty$. Que peut-on en déduire pour les boules ouvertes $B(\alpha, 1/2)$ et $B(\beta, 1/2)$?
  (b) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
(2) Montrer de même que $L^\infty([0,1])$ n'est pas séparable, en considérant les fonctions $f_t = \mathbf{1}_{[0,t]}$, $t \in [0,1]$.

Exercice 54. Montrer que $\mathcal{B}(\ell^2)$ n'est pas séparable.

Exercice 55. On note $\mathcal{P}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué toutes les fonctions $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$P(t) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e^{i\alpha_j t} ,$$

où les λ_j sont complexes et les α_j réels.

(1) Montrer que si $R \in \mathcal{P}$, alors $\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} R(t)\, dt$ admet une limite quand $T \to \infty$.

(2) Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} P(t)\overline{Q(t)}\, dt .$$

Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}$. En notant $\|\ \cdot\ \|$ la norme associée, exprimer $\|P\|^2$ en fonctions de coefficients de P.

(3) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $e_\alpha \in \mathcal{P}$ la fonction $t \mapsto e^{i\alpha t}$. Montrer que la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est orthonormale, et en déduire que l'espace préhilbertien $\mathcal{P}$ n'est pas séparable.

(4) Soit (α_n) une suite de réels deux-à-deux distincts. Montrer que pour toute suite $(\lambda_n) \in \ell^2$, les fonctions P_n définies par $P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e^{i\alpha_j t}$ forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}$, et déterminer $\lim_{n\to\infty} \langle P_n, e_\alpha\rangle$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{P}$ n'est pas un espace de Hilbert.

III Exercices “pas courts”

Exercice 56. Soit $(E, \|\ \cdot\ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On suppose que la norme $\|\ \cdot\ \|$ vérifie l'identité du parallèlogramme :

$$\forall a, b \in X\ :\ \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) .$$

Le but de l'exercice est de montrer que la norme $\|\ \cdot\ \|$ est préhilbertienne. Pour cela (cf l'exercice 1), on définit une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$B(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) .$$

(1) Soient $x_1, x_2, y \in E$.
   (a) Montrer qu'on a $\|x_1+x_2+2y\|^2 = 2\left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2\right) - \|x_1-x_2\|^2$, et donner une formule analogue pour $\|x_1 + x_2 - 2y\|^2$.
   (b) En déduire que $B(x_1 + x_2, 2y) = 2\left(B(x_1, y) + B(x_2, y)\right)$.

(2) Déduire de (1) qu'on a $B(u+u', v) = B(u, v)+B(u', v)$ pour tous $u, u', v \in E$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 57. (théorème du point fixe de Browder)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert réel, et C est un convexe fermé borné de H. Soit $T : C \to C$ une application 1-lipschitzienne. Le but de l'exercice est de montrer que T possède un point fixe. Dans la suite, on posera $R = \sup\{\|x\|;\ x \in C\}$.

(1) Soit $a \in C$ fixé. Pour $\lambda \in]0,1[$, on définit une application $T_\lambda : C \to H$ par $T_\lambda(x) = (1-\lambda)T(x) + \lambda a$. Montrer qu'on a $T_\lambda(C) \subset C$ et que T_λ possède un unique point fixe.

(2) Déduire de (1) que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in C;\ \|T(x) - x\| \leq \varepsilon\}$ est non-vide.

(3) Soient $a, b \in C$, et soit $m = \frac{a+b}{2}$. Soit également $\varepsilon \in]0,1]$. On suppose qu'il existe $x \in C$ tel que

$$\|x - a\| \leq \|x - m\| \quad \text{et} \quad \|x - b\| \leq \|x - a\| + \varepsilon\,.$$

En utilisant l'identité du parallèlogramme, montrer que $\|b - a\| \leq \sqrt{(8R+2)\varepsilon}$.

(4) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $C_\varepsilon = \{x \in C;\ \|T(x) - x\| \leq \varepsilon\}$ et $r_\varepsilon = \inf\{\|x\|;\ x \in C_\varepsilon\}$.

(a) Montrer que r_ε croit quand ε décroit, et admet une limite finie quand ε tend vers 0. Dans la suite, on pose $r = \lim_{\varepsilon \to 0^+} r_\varepsilon$.

(b) Soit $(\varepsilon_n) \subset]0,1]$ une suite décroissante tendant vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(x_n) \subset C$ telle que $x_n \in C_{\varepsilon_n}$ pour tout n et $\|x_n\| \to r$.

(c) Soient $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \leq q$. On pose $a = \frac{x_p + x_q}{2}$ et $b = T(a)$. En appliquant (3) avec $x = x_p$ ou $x = x_q$ et $\varepsilon = \varepsilon_p$ ou ε_q, montrer qu'on a $\|b - a\| \leq \sqrt{(8R+2)\varepsilon_p}$. Autrement dit $\frac{x_p + x_q}{2} \in C_{\eta_p}$, où $\eta_p = \sqrt{(8R+2)\varepsilon_p}$.

(d) En utilisant (c), montrer qu'on a $\lim_{p,q\to\infty} \left\|\frac{x_p + x_q}{2}\right\| = r$. En déduire, à l'aide de l'identité du parallèlogramme, que la suite (x_n) est de Cauchy.

(5) Conclure.

Exercice 58. (théorème de Müntz)
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : *L'espace vectoriel engendré par les fonctions t^{λ_n}, $n \in \mathbb{N}$ est dense dans $L^2([0,1])$ si et seulement si $\sum_1^\infty 1/\lambda_n = \infty$.* On *rappelle* un calcul de déterminant "bien connu" : si $a_1, \dots a_n$, $b_1, \dots b_n$ sont des réels strictement positifs, alors le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est donné par la formule

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right) = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\,\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}\,.$$

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $N \geq 1$. Calculer la distance de la fonction $t \mapsto t^k$ à l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_N}$, au sens de la norme de $L^2([0,1])$. (*Utiliser l'exercice 3*).

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 59. (théorème de Stampacchia)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert réel, et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire. On suppose qu'il existe deux constantes $C < \infty$ et $c > 0$ telles que $|a(x,y)| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x, y \in H$ et $a(x,x) \geq c\,\|x\|^2$ pour tout $x \in H$. On fixe également une forme linéaire continue $\Phi : H \to \mathbb{R}$, et un convexe fermé non vide $K \subset H$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant: *il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$\forall h \in K \ : \ a(u, h-u) \geq \Phi(h-u)\,. \tag{1}$$

(1) Démontrer le résultat lorsque a est le produit scalaire de H.
(2) Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. On suppose que
$$\forall x \in H \ : \ \langle A(x), x\rangle \geq c\,\|x\|^2.$$
  (a) Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\|I - \varepsilon A\| < 1$.
  (b) Montrer que pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que
$$p_K(\varepsilon(f - A(u)) + u) = u.$$
(3) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\forall x, y \in H \ : \ a(x,y) = \langle A(x), y\rangle$.
(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 60. (théorème ergodique de von Neumann)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert réel, et $T : H \to H$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})\,.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in H$, on a
$$||T^*(x) - x||^2 \leq 2\left(||x||^2 - \langle x, T(x)\rangle\right).$$
(2) En utilisant (1), montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)$. En déduire une décomposition de H à l'aide de $\mathrm{Ker}(I-T)$ et de $\mathrm{Im}(I-T)$.
(3) Calculer $S_n(x)$ pour $x \in \mathrm{Ker}(I-T)$, et déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}(I-T)$.
(4) Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $(S_n(x))$ converge vers $\pi(x)$, où π est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(I-T)$.

Exercice 61. (racine carrée d'un opérateur positif)
Soit H un espace de Hilbert, et soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif. Le but de l'exercice est de montrer que A possède une unique **racine carrée** positive; autrement dit, qu'il existe un unique opérateur positif S tel que $S^2 = A$.

(1) Dans cette partie, on montre l'existence d'une racine carrée positive de A.

(a) Pourquoi peut-on supposer que $\|A\| \leq 1$? Montrer qu'alors $B = I - A$ est positif et vérifie $\|B\| \leq 1$.
(b) Montrer qu'on peut écrire $\sqrt{1-t} = 1 - \sum_1^\infty c_n t^n$ pour tout $t \in [0,1]$, où les coefficients c_n sont positifs.
(c) Montrer que l'opérateur $S = I - \sum_1^\infty c_n B^n$ est bien défini et répond à la question. Montrer de plus que S commute avec tout opérateur qui commute avec A.

(2) Dans cette partie, on montre l'unicité de la racine carrée positive. Soit donc $T \in \mathcal{B}(H)$ un autre opérateur positif vérifiant $T^2 = A$.
(a) Montrer qu'on a $(S-T)(S+T) = 0$. Que peut-on en déduire concernant $\mathrm{Im}(S+T)$ et $\mathrm{Ker}(S-T)$?
(b) Montrer que $\mathrm{Im}(S+T)^\perp = \mathrm{Ker}(S+T) = \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Ker}(T)$.
(c) Montrer que $T = S$.

Exercice 62. (décomposition polaire)
Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur inversible. Montrer que T peut s'écrire de manière unique sous la forme $T = UR$, où $R \in \mathcal{B}(H)$ est positif et $U \in \mathcal{B}(H)$ est unitaire. (*Poser* $R = \sqrt{T^*T}$).

Exercice 63. (décomposition de Wold des isométries)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert et $V \in \mathcal{B}(H)$ est une isométrie.

(1) Montrer que si M est un sous-espace fermé de H, alors $V(M)$ est également fermé.
(2) Montrer que $\Theta = \bigcap_{n\geq 1} V^n(H)$ est un sous-espace fermé de H invariant par V, et que $V_{|\Theta}$ est unitaire.
(3) On pose $Z = V(H)^\perp$, et on note K le sous-espace fermé de H engendré par $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n(Z)$.
(a) Montrer que les sous-espaces $V^n(Z)$, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux orthogonaux.
(b) En déduire que K s'identifie canoniquement à

$$\ell^2(Z) = \left\{ (z_n) \in Z^{\mathbb{N}};\ \sum_{n=0}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty \right\},$$

et décrire l'action de $V_{|K}$ quand on l'identifie à un opérateur sur $\ell^2(K)$.
(c) Montrer que si M est un sous-espace fermé de K invariant par V et non réduit à $\{0\}$, alors $V_{|M}$ n'est pas unitaire. (On dit ainsi que $V_{|K}$ est **complètement non-unitaire**)

(4) Montrer qu'on a $H = \Theta \oplus K$, où la somme directe est orthogonale.
(5) Expliciter M et K lorsque V est l'opérateur $S : \ell^2 \to \ell^2$ défini par $S(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$.

Exercice 64. (opérateurs à noyau)
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On dit que K est un *noyau borné sur* L^2 si les propriétés suivantes ont lieu :

- pour toute $f \in L^2(\Omega)$, la fonction $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est intégrable sur Ω pour presque tout $x \in \Omega$, et la fonction $T_K f$ définie presque partout par la formule
$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)\, d\mu(y)$$
appartient à $L^2(\Omega)$;
- l'application linéaire $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ainsi définie est continue.

(1) On suppose qu'il existe une constante C telle que
$$\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \leq C \, \|f\|_{L^2}^2$$
pour toute $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que K est un noyau borné sur L^2 et qu'on a $\|T_K\| \leq C^{1/2}$. Montrer également que $T_K^* = T_{K^*}$, où $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.
(2) Montrer que si $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, alors K est un noyau borné sur L^2.
(3) Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive w sur Ω et une constante C telles que les propriétés (H1) et(H2) suivantes soient vérifiées :

(H1) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(y)\, d\mu(y) \leq C\, w(x)$ pour tout $x \in \Omega$;
(H2) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)\, d\mu(x) \leq C\, w(y)$ pour tout $y \in \Omega$.

(a) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a
$$\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \leq C^{1/2} w(x)^{1/2} \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y) \right)^{1/2}.$$
(b) Montrer que K est un noyau borné sur L^2, avec $\|T_K\| \leq C$.

Exercice 65. (matrice de Hilbert)
Montrer qu'on définit un opérateur borné $H : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$ en posant
$$(Hx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\, x_j\,,$$
et qu'on a $\|H\| \leq \pi$. (*Utiliser l'exercice 64 (3) avec* $\Omega = \mathbb{N}^*$ *et* μ *la mesure de décompte. Poser* $w(i) = \frac{1}{\sqrt{i}}$ *pour* $i \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 66. (opérateur de moyenne)

(1) Montrer que la formule

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

définit un opérateur borné $A : L^2(]0,\infty[) \to L^2(]0,\infty[)$, avec $\|A\| \leq 2$. (*Utiliser l'exercice 64 (3) avec* $w(t) = t^{-\alpha}$ *pour* $\alpha > 0$ *bien choisi*).

(2) Montrer qu'en fait $\|A\| = 2$. (*Considérer* $f_\beta(t) = \mathbf{1}_{]0,1]}(t)t^{-\beta}$, $\beta > 0$).

(3) Déterminer l'adjoint de l'opérateur A.

(4) Montrer qu'on a $A^*A = A + A^* = AA^*$. En déduire que l'opérateur $U = I - A$ est unitaire.

Exercice 67. (espace de Bergman)
Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et $H(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

(1) Montrer que si $f \in H(\mathbb{D})$ et si $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ est un disque fermé contenu dans $\mathbb{D}$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_D f dm\ ,$$

où m est la mesure de Lebesgue. En déduire que pour tout point $z \in \mathbb{D}$ et pour toute fonction $f \in H(\mathbb{D})$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-|z|)}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}\ ,$$

où on a posé $||f||_{L^2(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^2 dm\right)^{1/2} \leq \infty$.

(2) On définit l'**espace de Bergman** $B^2(\mathbb{D})$ par

$$B^2(\mathbb{D}) = H(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D});\ \int_{\mathbb{D}} |f|^2 dm < \infty \right\},$$

et on munit $B^2(\mathbb{D})$ de la norme induite par $L^2(\mathbb{D})$.

(a) En utilisant (1), montrer que si (f_n) est une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$, alors (f_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact.

(b) Montrer que $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, et que la convergence dans $B^2(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts. Donner l'expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$.

(3) Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1}\,|c_n|^2\ .$$

En déduire une autre expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$.

(4) On pose $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $B^2(\mathbb{D})$.

(5) Montrer que si $a \in \mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction $K_a \in B^2(\mathbb{D})$ telle que pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$, on ait
$$f(a) = \langle f, K_a \rangle \ .$$
(6) Soit $a \in \mathbb{D}$. En utilisant (4), déterminer explicitement la fonction K_a.
(7) Conclure que si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a
$$f(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \, \frac{dm(z)}{(1 - \overline{z}a)^2} \ .$$

Exercice 68. (opérateurs de Hilbert-Schmidt)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert séparable.

(1) Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ Montrer que si $(e_i)_{i\in I}$ et $(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont deux bases orthonormée de H, alors
$$\sum_{i\in I} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|T^*(k_\lambda)\|^2 \leq \infty\,.$$
En déduire que la quantité
$$\|T\|_{\mathcal{S}_2} = \Big(\sum_{i\in I} \|T(e_i)\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$
ne dépend pas de la base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$.
(2) Montrer qu'on a $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{S}_2}$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$.
(3) Dans cette question, on prend $H = \mathbb{K}^d$, et on note (a_{ij}) la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{K}^d$. Exprimer $\|T\|_{\mathcal{S}_2}$ à l'aide des coefficients a_{ij}.
(4) Dans cette question, on prend $H = \ell^2$. Soit $a = (a_n) \in \ell^\infty$, et soit M_a l'opérateur sur ℓ^2 défini par $M_a((x_n)) = (a_n x_n)$. Calculer $\|M_a\|_{\mathcal{S}_2}$.
(5) On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est un **opérateur de Hilbert-Schmidt** si $\|T\|_{\mathcal{S}_2} < \infty$, et on note $\mathcal{S}_2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H. Montrer que $(\mathcal{S}_2(H), \| \ \cdot \ \|_{\mathcal{S}_2})$ est un espace de Hilbert.
(6) Dans cette question, on prend $H = L^2(\Omega, \mu)$, où la mesure μ est σ-finie.
   (a) Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Montrer que la formule
$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) \, d\mu(y)$$
   définit un opérateur de Hilbert-Schmidt $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, et qu'on a $\|T_K\|_{\mathcal{S}_2} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$. (*Utiliser l'exercice 16*).
   (b) Montrer qu'inversement, tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ est du type T_K, pour un certain "noyau" $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. (*Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une base orthonormée de* $L^2(\Omega)$. *Poser* $K = \sum_{i,j} c_{i,j} \, \overline{e_i} \otimes e_j$, *où* $c_{i,j} = \langle T(e_i), e_j \rangle$).

Exercice 69. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et lipschitzienne. On note K la constante de Lipschitz de f, et (c_n) la suite de ses coefficients de Fourier.

(1) Soit $h \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$, montrer qu'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2 |c_n|^2 \leq K^2 h^2 \ .$$

(2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a $\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p}}$, et en déduire que

$$\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n| \leq \frac{K\pi}{2^{p/2}} \ .$$

(3) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Exercice 70. (matrice de Hilbert, 2)

(1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique valant $\pi - t$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de φ.

(2) On pose $L^2 = L^2([0, 2\pi[)$ et $H^2 = \{f \in L^2;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}$.
  (a) Montrer que l'application $f \mapsto \overline{\varphi} f$ est linéaire continue de H^2 dans L^2, et majorer sa norme.
  (b) Soit $f(t) = \sum_0^d a_k e^{ikt}$ un polynôme trigonométrique appartenant à H^2. Pour $j \in \{0, \dots, d\}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_{-j-1}(\overline{\varphi} f)$ à l'aide des a_k.

(3) Soit $d \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^{d+1}$ de la norme euclidienne, et $M_{d+1}(\mathbb{R})$ de la norme opératorielle associée. Montrer que la matrice $A = (\frac{1}{k+j+1})_{0 \leq j,k \leq d}$ vérifie $\|A\| \leq \pi$.

Exercice 71. (théorème de Korovkin; polynômes de Bernstein)
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $e_k \in E$ la fonction $x \mapsto x^k$. On dit qu'une application linéaire $T : E \to E$ est un **opérateur positif** si T change les fonctions positives en fonctions positives.

(1) Soit $f \in E$, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x, y \in [0,1]\ :\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(y-x)^2 \, .$$

(2) Ré-écrire cette inégalité sous la forme d'un encadrement de f par des fonctions du type $a_y e_0 + b_y e_1 + c_y e_2$.

(3) Soit (T_n) une suite d'opérateurs positifs sur E. On suppose que $T_n(e_k) \to e_k$ quand $n \to \infty$ (au sens de la norme de E) pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que $T_n(f) \to f$ pour *toute* fonction $f \in E$.

(4) Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit des polynômes $B_n f$, $n \in \mathbb{N}$ par la formule

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\,.$$

Déduire de ce qui précède que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, les polynômes $B_n f$ convergent uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 72. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions continues sur $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{K}$ tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ engendré par les fonctions $e_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$. (*Étant donné $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$, considérer la fonction $\widetilde{f} \in \mathcal{C}([0,1])$ définie par $\widetilde{f}(t) = f(|\log t|)$ pour $t \in]0,1]$ et $\widetilde{f}(0) = 0$*).

(2) On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ engendré par les fonctions du type $f(x) = P(x)e^{-x}$, où P est un polynôme.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(x) = \sum_0^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. Montrer qu'on a

$$|P_n(x) - e^{-x}| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, qu'on a $\|e_2 - P_n e_1\|_\infty = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ quand $n \to \infty$, et conclure que $e_2 \in \overline{\mathcal{A}}$.

(c) Montrer par récurrence sur n que $e_n \in \overline{\mathcal{A}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (*Si le résultat est connu pour n, commencer par approcher e_{n+1} par une fonction du type $x \mapsto e^{-\frac{(n+1)x}{2}} P(x)$ où P est un polynôme, puis approcher la fonction $x \mapsto e^{-n\frac{x}{2}}$ grâce à l'hypothèse de récurrence*).

(d) Conclure que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 73. Soit K un ensemble *fini*, $K = \{x_1, \dots, x_N\}$. On note $\mathcal{F}(K)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{C}$.

(1) Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(K)$ séparant les points de K et contenant les constantes. Montrer que si $a, b \in K$ et $a \neq b$, il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$ telle que $f(a) = 1$ et $f(b) = 0$.

(2) Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{F}(K)$ séparant les points de K et contenant les constantes.

(a) Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, on note $e_i \in \mathcal{F}(K)$ la fonction définie par $e_i(x_i) = 1$ et $e_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$. Déduire de (1) que $e_i \in \mathcal{A}$.

(b) Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{F}(K)$.

(3) En quoi le résultat de (2) est-il “meilleur” que le théorème de Stone-Weierstrass dans ce cas particulier?

(4) Quel résultat classique retrouve-t-on lorsque K est une partie de $\mathbb{C}$ et que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des restrictions à K des fonctions polynomiales?

Exercice 74. Dans tout l'exercice, K est un compact de $]0,1[$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit un polynôme P_n par

$$P_n(x) = x(1-x)\sum_{k=0}^{n}\left[1-2x(1-x)\right]^k.$$

Montrer que les P_n sont à coefficients entiers et que $P_n(x) \to 1/2$ uniformément sur K.

(2) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur K à coefficients entiers, et $\overline{\mathcal{A}}$ l'adhérence de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(K)$. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ contient toutes les fonctions constantes. (*Commencer par montrer, à l'aide de (1), que $\overline{\mathcal{A}}$ contient les fonctions constantes de la forme $k/2^n$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$*).

(3) Montrer que toute fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 75. (densité des polynômes dans $L^2(\mathbb{R}^+,\mu)$).
Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$ de la forme $d\mu(t) = w(t)dt$, où w est une fonction continue strictement positive telle que $w(t) = O(e^{-t^\alpha})$ quand $t \to \infty$, pour un certain $\alpha > 0$.

(1) Montrer que $L^2(\mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales.

(2) Dans cette question, on suppose qu'on a $w(t) = 0(e^{-c\sqrt{t}})$ quand $t \to \infty$, pour une certaine constante $c > 0$.

 (a) Montrer que si $f \in L^2(\mu)$, alors la formule

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)e^{z\sqrt{t}}d\mu(t)$$

 définit une fonction holomorphe bornée dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) < c/4\}$. Donner l'expression de $F^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

 (b) On suppose que $f \in L^2(\mu)$ vérifie $\int_0^\infty f(t)t^n d\mu(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction F est impaire dans un voisinage de 0. En déduire que F se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, puis que $F = 0$.

 (c) Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $L^2(\mu)$.

(3) Dans cette question, on prend $w(t) = e^{-t^{1/4}}$. Calculer $\int_0^\infty \sin(t^{1/4})t^n d\mu(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que les fonctions polynomiales ne sont pas denses dans $L^2(\mu)$.

(4) Dans cette question, on prend $w(t) = e^{-t^2/2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2}) = P_n(t)e^{-t^2/2}$, où P_n est un polynôme de degré n.

(b) Montrer que la famille (P_n) est orthogonale dans $L^2(\mu)$. (*Calculer* $\langle P_n, t^k \rangle$ *pour* $k < n$).

(c) On pose $H_n = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{n!}} P_n$. Montrer que la suite (H_n) est une base orthonormée de $L^2(\mu)$.