Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

(espaces vectoriels normés)

I Exercices "de cours"

Exercice 1. (Hölder)
Soient p et q deux exposants conjugués, i.e. deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) Montrer que pour tous réels positifs a et b, on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. (*Passer au logarithme*).
(2) En déduire l'inégalité de Hölder.

Exercice 2. (Minkowski et Minkowski-inverse)
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace mesuré, et soit $p \in]0, \infty[$. Soient également f et g deux fonctions mesurables positives sur Ω, non presque-partout nulles.

(1) Montrer qu'on peut écrire
$$\frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} = \alpha \, \frac{f}{\|f\|_p} + (1-\alpha) \, \frac{g}{\|g\|_p} \,,$$
pour un certain $\alpha \in [0,1]$.
(2) En déduire l'inégalité de Minkowski $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ si $p \geq 1$, et l'inégalité de Minkowski "inverse" $\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$ si $p < 1$.

Exercice 3. Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée associée. Que dire dans un espace métrique quelconque?

Exercice 4. Soit $c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Montrer que c_0 est un sous-espace fermé de ℓ^∞.

Exercice 5. Soit $X = c_0$ ou ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n \in X$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1. Montrer que si $x = (x_n) \in X$, alors on peut écrire $x = \sum_0^\infty x_n e_n$, où la série converge dans X. Le résultat est-il valable pour $X = \ell^\infty$?

Exercice 6. (Comparaison des espaces L^p)
Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

(1) On suppose que la mesure μ est *finie*. Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^{p_2}(\mu) \subset L^{p_1}(\mu)$, et que si de plus $\mu(\Omega) = 1$, alors $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$ pour toute $f \in L^{p_2}(\mu)$.
(2) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de décompte; autrement dit, $L^p(\mu) = \ell^p$ pour tout $p \in [1, \infty]$. Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ et $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$ pour tout $x \in \ell^{p_1}$. (*Commencer par le cas où* $\|x\|_{p_1} = 1$).
(3) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue. Montrer que les espaces $L^p(\mu)$ ne sont pas comparables; autrement dit : si $p_1 \neq p_2$, alors il existe des fonctions de L^{p_1} qui ne sont pas dans L^{p_2} et vice-versa.

Exercice 7. Soit T un ensemble non-vide.
(1) On note $\ell^\infty(T)$ l'espace de toutes les fonctions bornées sur T (à valeurs réelles), muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Montrer que $\ell^\infty(T)$ est un espace de Banach.
(2) On suppose que T est un espace topologique, et on note $\mathcal{C}_b(T)$ l'espace des fonctions continues bornées sur T, toujours muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_b(T)$ est un espace de Banach.

Exercice 8. On note $\mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1])$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{C}1}$ définie par $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Est-il complet pour la norme $\| \cdot \|_\infty$?

Exercice 9. Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.
(1) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Montrer que (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) telle $\sum_0^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$.
(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
  (i) $(X, \| \cdot \|)$ est complet.
  (ii) Toute série normalement convergente à termes dans X est convergente.
(3) Appliquer ce résultat pour démontrer la complétude de $L^1(\mu)$.

Exercice 10. Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels normés, et soit $B : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) B est continue.
(ii) Il existe une contante C telle que $\|B(x,y)\| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

Exercice 11. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, et soit $p \in [1, \infty]$. Montrer que l'application linéaire $M_a : \ell^p \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par $M_a((x_n)) = (a_n x_n)$ envoie ℓ^p dans ℓ^p, qu'elle est est continue de ℓ^p dans ℓ^p, et déterminer $\|M_a\|$.

Exercice 12. On identifie $M_d(\mathbb{R})$ avec l'ensemble des applications linéaires (continues) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Si $p \in [1, \infty]$, on note $\| \cdot \|_p$ la norme ℓ^p sur $\mathbb{R}^d$, et $\| \cdot \|_{p,p}$ la norme associée sur $M_d(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in M_d(\mathbb{R})$, alors
$$\|A\|_{1,1} = \max_{1 \le j \le d} \sum_{i=1}^{d} |a_{i,j}|$$

(2) Déterminer de même $\|A\|_{\infty,\infty}$ en fonction des coefficients de A.

(3) Pour $A \in M_d(\mathbb{R})$, on note A^* la transposée de A, et on rappelle qu'on a $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

(a) Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée $(f_1, \dots, f_d)$ de $\mathbb{R}^d$ constituée de vecteurs propres pour la matrice A^*A?

(b) Montrer que pour toute matrice $A \in M_d(\mathbb{R})$, on a
$$\|A\|_{2,2} = \sup\left\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \text{ valeur propre de } A^*A\right\}.$$

Exercice 13. Soit $\delta : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\delta(f) = f(0)$. Montrer que si on munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme L^1, alors δ n'est pas continue.

Exercice 14. Soient X un espace de Banach, Y un e.v.n. et $T : X \to Y$ linéaire continue. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \ge c\|x\|$ pour tout $x \in X$. Montrer que T est injective et que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée dans Y.

Exercice 15. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de X dans Y. On fait les hypothèses suivantes :

(i) La suite T_n est bornée (en norme);

(ii) $T_n(z) \to 0$ pour tout $z \in D$, où D est une partie dense de X.

Montrer que $T_n(x) \to 0$ pour tout $x \in X$.

Exercice 16. (prolongement par densité)
Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace de Banach et E un sous-espace vectoriel de X dense dans X. Montrer que toute application linéaire continue $T : E \to Y$ se prolonge de manière unique en un opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Exercice 17. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{B}(X)$. Montrer que la série $\sum \frac{T^n}{n!}$ converge dans $\mathcal{B}(X)$, et majorer la norme de $\sum_0^\infty \frac{T^n}{n!}$.

Exercice 18. Soit X un espace de Banach. Montrer que si $T \in \mathcal{B}(X)$ vérifie $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible et donner une formule pour $(I - T)^{-1}$.

Exercice 19. Pour $p \in [1, \infty]$, on note $\| \cdot \|_p$ la norme ℓ^p sur $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Montrer que pour $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, on a

$$\| \cdot \|_{p_2} \leq \| \cdot \|_{p_1} \leq N^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \| \cdot \|_{p_2} ,$$

et que les constantes apparaissant sont les meilleures possibles.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

(1) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $Z \subset E$ de dimension finie, on peut trouver un point $x \in E$ tel que $\|x\| = 1 = d(x, Z)$.
(2) Montrer qu'on peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la boule unité de E telle que $\|x_i - x_j\| \geq 1$ pour $i \neq j$.

Exercice 21. (quotients)
Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. On note E/F l'espace vectoriel quotient, et $\pi_{E/F} : E \to E/F$ la "surjection canonique". Pour $x = \pi_{E/F}(z) \in E/F$, on pose

$$\|x\|_{E/F} = d(z, F) := \inf\{\|z - u\|;\ u \in F\} .$$

(1) Justifier la définition, puis montrer que $\| \cdot \|_{E/F}$ est une norme sur E/F.
(2) Montrer que l'application linéaire $\pi_{E/F}$ est continue, avec $\|\pi_{E/F}\| \leq 1$. Montrer également que pour tout $r > 0$, on a $\pi_{E/F}(B_E(0, r)) = B_{E/F}(0, r)$ (boules*ouvertes*).
(3) Montrer que si E est un espace de Banach, alors E/F est complet pour $\| \cdot \|_{E/F}$. (*Utiliser l'exercice 9*).

II Exercices "courts"

Exercice 22. (convexité et inégalité triangulaire)

(1) Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $N : X \to \mathbb{R}^+$ une application vérifiant les propriétés (i) et (ii) suivantes :
  (i) $N(\lambda x) = \lambda N(x)$ pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \geq 0$;
  (ii) l'ensemble $B = \{x \in X;\ N(x) \leq 1\}$ est *convexe* : si $N(x) \leq 1$ et $N(y) \leq 1$, alors $N(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq 1$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.
  (a) Soient $x, y \in X$. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\alpha > N(x)$ et $\beta > N(y)$, le point $z = \frac{x+y}{\alpha+\beta}$ appartient à B.
  (b) Montrer que N vérifie l'inégalité triangulaire; autrement dit : si $x, y \in X$, alors $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
(2) Utiliser (1) pour démontrer l'inégalité de Minkowski.

Exercice 23. (Minkowski via Hölder)
Soit $p \in [1, \infty]$, et soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré. Remarquer que si $f, g \in L^p(\mu)$, alors $|f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$, et en déduire l'inégalité de Minkowski en utilisant Hölder.

Exercice 24. On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

Exercice 25. Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X (à valeurs réelles), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit également $a \in X$ fixé. Pour $x \in X$, on note $f_x : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_x(z) = d(z, x) - d(z, a)\,.$$

(1) Montrer que $f_x \in \mathcal{C}_b(X)$ pour tout $x \in X$.
(2) Montrer que l'application $x \mapsto f_x$ est une isométrie de X dans $\mathcal{C}_b(X)$, i.e. $\|f_x - f_y\|_\infty = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.

Exercice 26. Soit (α_n) une suite de réels positifs. Construire une suite de fonctions $(f_n) \subset L^1([0,1])$ qui converge simplement vers 0 et vérifie $\|f_n\|_{L^1} = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. Soit $B = \{f \in L^2([0,1]);\ |f(t)| \leq 1 \text{ presque partout}\}$. Montrer que B est fermé dans $L^2([0,1])$.

Exercice 28. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On suppose qu'on a $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, et que la suite (f_n') tend vers 0 en norme L^2. Montrer que (f_n) tend vers 0 uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 29. (convexité des normes L^p)
Dans cet exercice, $(T, \mathfrak{T}, \mu)$ est un espace mesuré et p, q, r sont des nombres réels vérifiant $1 \leq p < r < q$. On écrit $\frac{1}{r} = \theta\frac{1}{p} + (1-\theta)\frac{1}{q}$, où $\theta \in [0,1]$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *pour toute fonction mesurable positive $f : T \to \mathbb{R}^+$, on a*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}\,.$$

(1) On écrit $r = \alpha\, p + (1-\alpha)\, q$, où $\alpha \in [0,1]$. Montrer que si f est une fonction mesurable positive sur T, alors

$$\int_T f^r \leq \left(\int_T f^p\right)^\alpha \left(\int_T f^q\right)^{1-\alpha}.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité

Exercice 30. L'espace $\mathcal{C}([0,1])$ est-il complet pour la norme L^1?

Exercice 31. Soient X et Y deux e.v.n. et soit $T : X \to Y$ une application linéaire non continue. Montrer qu'il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle que $\|x_n\| \to 0$ et $\|T(x_n)\| \to \infty$.

Exercice 32. Soient I un ensemble non-vide, X un espace vectoriel normé, et $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \ell^\infty(I)$ un homomorphisme d'algèbres. Montrer que si Φ est continu, alors $\|\Phi\| \leq 1$. (*Majorer* $\|\Phi(T^n)\|_\infty$ *pour* $T \in \mathcal{B}(X)$ *et* $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 33. Soit $D : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application linéaire définie par $D(f) = f'$. Étudier la continuité de D dans les deux cas suivants, et calculer $\|D\|$ en cas de continuité.

(i) $\mathcal{C}^1([0,1])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ et $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
(ii) $\mathcal{C}^1([0,1])$ et $\mathcal{C}([0,1])$ sont tous les deux munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$

Exercice 34. Soit $I \subset \mathbb{R}$, et soit $N_I : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $N_I(P) = \sup_{t\in I} |P(t)|$.

(1) À quelle condition N_I est-elle une norme sur $\mathbb{R}[X]$?
(2) On prend $I = [-1,1]$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\phi_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\phi_a(P) = P(a)$. Pour quels a la forme linéaire ϕ_a est-elle continue sur $(\mathbb{R}[X], N_I)$? Calculer alors $\|\phi_a\|$.

Exercice 35. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

(1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E linéairement indépendants. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les f_n. Construire une forme linéaire non continue sur F.
(2) Montrer qu'il existe des formes linéaires non continues sur E.

Exercice 36. Soit $(T, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $\phi \in L^\infty(\mu)$.

(1) Montrer que l'opérateur $M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ défini par $M_\phi(f) = \phi f$ est continu, et majorer $\|M_\phi\|$.
(2) Calculer $\|M_\phi\|$, en supposant que la mesure μ vérifie la propriété suivante : pour tout ensemble mesurable A tel que $\mu(A) > 0$, on peut trouver $B \subset A$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$.

Exercice 37. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré au plus 759. On suppose qu'on a $\int_0^1 |P_n(t)|\,dt \leq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (P_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur l'intervalle $[3\pi, 147]$.

Exercice 38. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie (sur $\mathbb{R}$). Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour $x = \sum_i x_i e_i \in E$ (somme *finie*), on pose $N_1(x) = \sum_i |x_i|$ et $N_\infty(x) = \sup_i |x_i|$. Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E, et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 39. Soient $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, avec $p_1 \neq p_2$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_{p_1}$ et $\|\cdot\|_{p_1}$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1])$, et que les normes $\|\cdot\|_{p_1}$ et $\|\cdot\|_{p_1}$ ne sont pas comparables sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact).

Exercice 40. (Preuve "quantitative" du théorème de Riesz).

(1) Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie d. Montrer qu'il faut au moins 2^d boules de rayon $1/2$ pour recouvrir la boule unité de F. (*Si $B_F \subset B_1 \cup \cdots \cup B_N$, majorer le volume de B_F*).

(2) En déduire que si la boule unité d'un espace vectoriel normé E peut être recouverte par N boules de rayon $1/2$, alors E est de dimension finie au plus égale à $\log N / \log 2$.

III Exercices "pas courts"

Exercice 41. (jauge d'un convexe)
Soit K un partie de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 dans son intérieur. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$j_K(x) = \inf\left\{\alpha > 0;\ \frac{x}{\alpha} \in K\right\}.$$

(1) Justifier la définition, et montrer qu'on a $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$.

(2) On suppose que K est borné. Montrer que $j_K(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(3) Montrer que si K est convexe, alors $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. (Commencer par montrer que si $x/\alpha \in K$ et $y/\beta \in K$, alors $\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in K$).

(4) On suppose que K est compact, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^d$, et que K est la boule unité fermée de j_K.

Exercice 42. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, et soit $T : X \to Y$. On suppose que T est continue et qu'on a $T(u+v) = T(u) + T(v)$ pour tous $u, v \in X$. Montrer que T est linéaire. (*Démontrer l'identité $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ d'abord pour $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis pour $\lambda \in \mathbb{Q}$*, et conclure).

Exercice 43. (isométries, théorème de Mazur-Ulam)
On dit qu'une application $T : X \to Y$ entre deux deux espaces vectoriels normés est une **isométrie** si elle conserve les distances, i.e. $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in X$.

A Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant: *si $T : X \to Y$ est une isométrie surjective d'un espace vectoriel normé sur un autre avec $T(0) = 0$, alors T est linéaire.*

(1) Soit $(E\| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, et soient $a, b \in E$. On définit par récurrence une suite $(K_n(a, b))$ de parties de E en posant

$$K_0(a,b) = \Big\{u \in E;\ \|u - a\| = \|b - a\|/2 = \|u - b\|\Big\}, \text{ et}$$

$$K_{n+1}(a,b) = \Big\{u \in K_n(a,b);\ \forall z \in K_n(a,b)\ :\ \|z - u\| \leq \operatorname{diam}(K_n(a,b))/2\Big\}.$$

(a) Montrer par récurrence sur n que chaque $K_n(a, b)$ contient le point $\frac{a+b}{2}$ et est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$.

(b) Montrer que $\operatorname{diam}(K_{n+1}(a, b)) \leq \operatorname{diam}(K_n(a, b))/2$.

(c) Conclure qu'on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n(a, b) = \left\{\frac{a+b}{2}\right\}$.

(2) Déduire de (1) que si $T : X \to Y$ une isométrie surjective, alors $T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x)+T(y)}{2}$ pour tous $x, y \in X$.

(3) Démontrer le résultat souhaité. (*Utiliser l'exercice 42*).

B Soit $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par $T(x_0, x_1, \dots) = (|x_0|, x_0, x_1, \dots)$. Montrer que T est une isométrie. Est-elle linéaire?

Exercice 44. (Comportement asymptotique des normes L^p)

(1) Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie.

(a) Soit $f \in L^\infty(\mu)$. Montrer que pour tout $\alpha < \|f\|_\infty$, on peut trouver un ensemble mesurable A tel que $\mu(A) > 0$ et

$$\forall p \in [1, \infty[\ \ :\ \ \int_\Omega |f|^p d\mu \geq \alpha^p \mu(A)\,.$$

(b) Montrer pour toute $f \in L^\infty(\mu)$, on a $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

(2a) Soit $x = (x_n) \in \ell^1$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \in [1, \infty[\ \ :\ \ \|x\|_p \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p} + \varepsilon\,.$$

(2b) Pour $x \in \ell^1$, déterminer $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Exercice 45. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite dans $L^1(\mu)$. On suppose que la suite (f_n) converge presque partout vers une fonction f. On suppose également que (f_n) est bornée en norme L^1.

(1) Montrer que $f \in L^1$.
(2) Peut-on affirmer que (f_n) converge vers f en norme L^1?
(3) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(|f_n| - |f_n - f| - |f| \Big)\, d\mu = 0\,.$$

(4) Déduire de (3) que si $\|f_n\|_1$ tend vers $\|f\|_1$ quand n tend vers l'infini, alors la suite (f_n) converge vers f en norme L^1.

Exercice 46. (convexité des normes L^p, 2)
On garde les notations de l'exercice 29. On veut retrouver le résultat de cet exercice par une autre méthode.

(1) Montrer que pour tout $a \geq 0$, on a $a^r \leq a^p + a^q$. En déduire que si $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ est un espace mesuré et si F est une fonction mesurable positive sur Ω telle que $\|F\|_{L^p(\nu)} \leq 1$ et $\|F\|_{L^q(\nu)} \leq 1$, alors $\|F\|_{L^r(\nu)} \leq 2$.
(2) Montrer que si f est une fonction mesurable positive sur T telle que $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1$ et $\|f\|_{L^q(\mu)} \leq 1$, alors $\|f\|_{L^r(\mu)} \leq 1$. (*Pour tout entier $N \geq 1$, appliquer (1) avec $(\Omega, \nu) = (T^N, \mu \otimes \cdots \otimes \mu)$ et la fonction F définie par $F(t_1, \dots, t_N) = f(t_1) \cdots f(t_N)$*).
(3) Démontrer le résultat souhaité. (*Appliquer (2) avec la mesure $\widetilde{\mu} = a\mu$ et la fonction $\widetilde{f} = bf$, où a et b sont des constantes judicieusement choisies).*

Exercice 47. Soit X un espace vectoriel normé.

(1) Soient $B = \overline{B}(a, r)$ et $B' = \overline{B}(a', r')$ deux boules fermées de X. Montrer qu'on a $B' \subset B$ si et seulement si $\|a' - a\| + r' \leq r$.
(2) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de boules fermées de X. On note a_n le centre de la boule B_n, et r_n son rayon. Montrer qu'on a $\sum_{i=0}^N \|a_{i+1} - a_i\| \leq r_0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
(3) On suppose que X est un espace de Banach. Montrer que si (B_n) est une suite décroissante de boules fermées de X alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

Exercice 48. Soit (X, d) un espace métrique. On note $Lip(X)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur X, à valeurs réelles. Pour $f \in Lip(X)$, on note $Lip(f)$ la constante de Lipschitz de f :

$$Lip(f) = \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{d(x,y)};\ x, y \in X\,,\ x \neq y \right\}.$$

(1) Montrer que $Lip(X)$ est un espace vectoriel.
(2) Soit $a \in X$. Pour $f \in Lip(X)$, on pose

$$\|f\|_{Lip,a} = |f(a)| + Lip(f).$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_{Lip,a}$ est une norme sur $Lip(X)$.

(b) Montrer que si b est un autre point de X, alors les normes $\|\cdot\|_{Lip,a}$ et $\|\cdot\|_{Lip,b}$ sont équivalentes.

(c) On suppose que X est un espace vectoriel normé (et que d est la distance associée à la norme de X). Montrer que toute forme linéaire continue sur X est dans $Lip(X)$, et qu'on a $\|\phi\|_{Lip,0} = \|\phi\|_{X^*}$ pour toute $\phi \in X^*$.

(3) On revient au cas d'un espace métrique (X, d) quelconque. Montrer que $Lip(X)$ est complet pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|_{Lip,a}$.

Exercice 49. (approximation arbitrairement mauvaise)
Soit X un espace de Banach de dimension infinie, et soit $(e_n)_{\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de X linéairement indépendants. On pose $E_0 = \{0\}$ et $E_n = \mathrm{Vect}\{e_0; \dots; e_{n-1}\}$ pour $n \geq 1$. Enfin, soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres strictement positifs tendant vers 0.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $\alpha \geq 0$. Montrer que pour tout $z \in E_{k+1}$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(z + \lambda e_{k+1}, E_{k+1}) = \alpha$. (*Penser au théorème des valeurs intermédiaires*).

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un vecteur $x_n \in E_{n+1}$ tel que $d(x_n, E_k) = \alpha_k$ pour tout $k \in \{0; \dots; n\}$. Combien vaut $\|x_n\|$?

(3) Soit $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace de dimension finie $E \subset X$ tel que $A \subset \{x;\ d(x, E) < \varepsilon\}$. En déduire que A est une partie relativement compacte de X.

(4) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $d(x, E_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 50. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$, muni de sa norme naturelle. On définit une application linéaire $V : E \to E$ par la formule

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

(1) Montrer que V est continue.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'opérateur V^n est donné par une formule du type

$$V^n f(x) = \int_0^x K_n(x, t) f(t)\, dt\,,$$

où $K_n : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonctions continue à déterminer.

(3) Calculer $\|V^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Montrer que pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'opérateur $\lambda I - V$ est inversible et $\|(\lambda I - V)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} e^{1/|\lambda|}$. Qu'en est-il pour $\lambda = 0$?

Exercice 51. (dual de c_0)
Dans cet exercice, on détermine le dual de l'espace de Banach c_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $e_n \in c_0$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1.

(1) Soit $a \in \ell^1$.
   (a) Montrer que la formule $\phi_a((x_n)) = \sum_0^\infty a_n x_n$ définit une forme linéaire continue sur c_0, et majorer $\|\phi_a\|$.
   (b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\sum_{n=0}^N |a_n| = \phi_a(\sum_{n=0}^N \varepsilon_n e_n)$, où $|\varepsilon_n| = 1$ pour tout n. En déduire qu'on a $\|\phi_a\| = \|a\|_1$.
(2) Soit $\phi : c_0 \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue sur c_0.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \phi(e_n)$. Montrer que si $x = (x_n) \in c_0$, alors $\phi(x) = \sum_0^\infty a_n x_n$, où la série converge dans $\mathbb{R}$.
   (b) En raisonnant comme dans (1b), montrer que $a = (a_n)$ appartient à ℓ^1 et que $\phi = \phi_a$.
(3) Conclure que le dual de c_0 s'identifie isométriquement à ℓ^1.

Exercice 52. (dual de ℓ^p)
Soit $p \in [1, \infty[$, et soit q l'exposant conjugué. En procédant comme dans l'exercice 51, montrer que le dual de ℓ^p s'identifie isométriquement à ℓ^q.

Exercice 53. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire non-nulle sur E. Soit également $a \in E$ vérifiant $\phi(a) \neq 0$. On note $d(a, \ker(\phi))$ la distance de a à $\ker(\phi)$, i.e. $d(a, \ker(\phi)) = \inf\{\|a - v\|;\ v \in \ker(\phi)\}$.

(1) Rappeler pourquoi on a $E = \ker(\phi) \oplus \mathbb{R}a$.
(2) Montrer que si $u \in \ker(\phi)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{|\phi(u+\lambda a)|}{\|u+\lambda a\|} \leq \frac{|\phi(a)|}{d(a,\ker(\phi))}$.
(3) Montrer que ϕ est continue si et seulement si $\ker(\phi)$ est fermé dans E, et qu'on a alors

$$\|\phi\| = \frac{|\phi(a)|}{d(a, \ker(\phi))} \,.$$

Exercice 54. (distances atteintes)
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, H un sous-espace vectoriel fermé de E différent de E, et $a \in E \setminus H$. On pose $d(a, H) = \inf\{\|a - h\|;\ h \in H\}$.

(1) On suppose que H est de dimension finie. Montrer qu'il existe un point $h \in H$ tel que $\|a - h\| = d(a, H)$.
(2) Dans cette question, on suppose que H est le noyau d'une forme linéaire continue $\phi : E \to \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 53, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe $h \in H$ tel que $d(a, h) = \|a - h\|$;
   (ii) Il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\phi(x)| = \|\phi\|$.
(3) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie comme suit :

$$\forall f \in E \quad : \quad \phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt\,.$$

Montrer que ϕ est continue et calculer $\|\phi\|$.

(b) Soit $a = \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1, et soit

$$H = \left\{ h \in E;\ \int_0^{1/2} h(t)\, dt = \int_{1/2}^1 h(t)\, dt \right\}.$$

Montrer qu'il n'existe aucune $h \in H$ telle que $\|a - h\|_\infty = d(a, H)$.

Exercice 55. Soit E un espace vectoriel normé et soit K un compact de E.

(1) Montrer que $E \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée.

(2) On suppose que $E \setminus K$ possède au moins une composante connexe bornée O, et on fixe un point $a \in O$.

(a) Pourquoi peut-on trouver $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset O$?

(b) Pour $z \in K$, on pose $\phi(z) = a + r\, \frac{z-a}{\|z-a\|}\,\cdot$

(i) Observer que ϕ est une application continue de K dans la sphère $S(a, r) = \{x \in E;\ \|x - a\| = r\}$.

(ii) Montrer que ϕ est *surjective* de K sur $S(a, r)$.

(3) Montrer que si E est de dimension infinie, alors $E \setminus K$ est connexe. Qu'en est-il si E est de dimension finie?

Exercice 56. (trois applications des quotients)

(1) Soit E un espace vectoriel normé. Soient également F et G deux sous-espaces (vectoriels) fermés de E. On suppose que G est de dimension finie.

(a) Montrer que $\pi_{E/F}(G)$ est fermé dans l'espace quotient E/F.

(b) En déduire que $F + G$ est un sous-espace fermé de E.

(2) Soient E et Y deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \to Y$ une application linéaire. On suppose que T est de rang fini, i.e. $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie. Montrer que T est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(T)$ est fermé dans E. (*Considérer l'espace quotient* $E/\mathrm{Ker}(T)$).

(3) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que la boule unité de E peut être recouverte par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $1/2$. On note $x_1, \dots, x_N$ les centres de ces boules, et on pose $F = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_N)$.

(a) Montrer qu'on a $\pi_{E/F}(B_E(0,1)) \subset B_{E/F}(0, 1/2)$.

(b) En déduire que $E/F = \{0\}$.

(c) Conclusion?